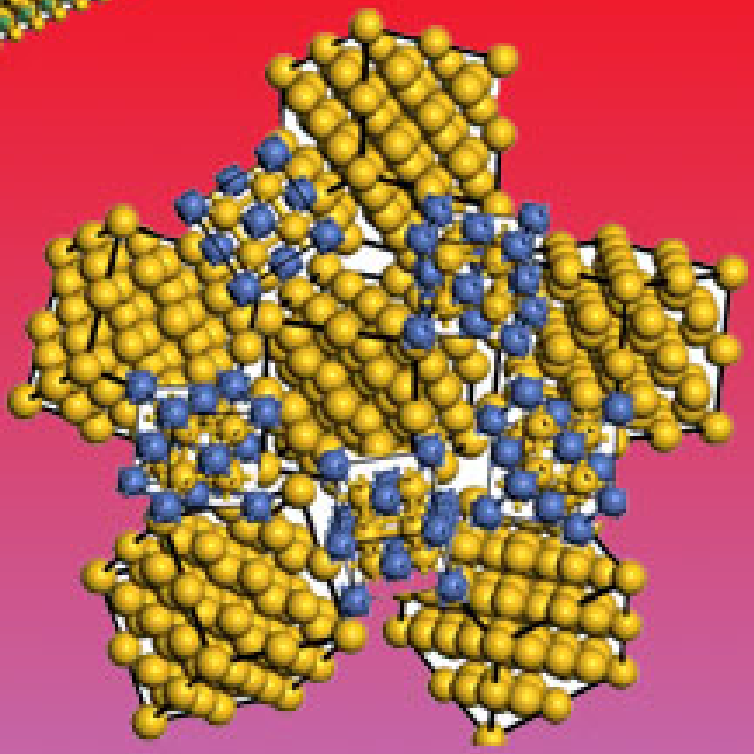
วารสารฟิสิกส์ไทย

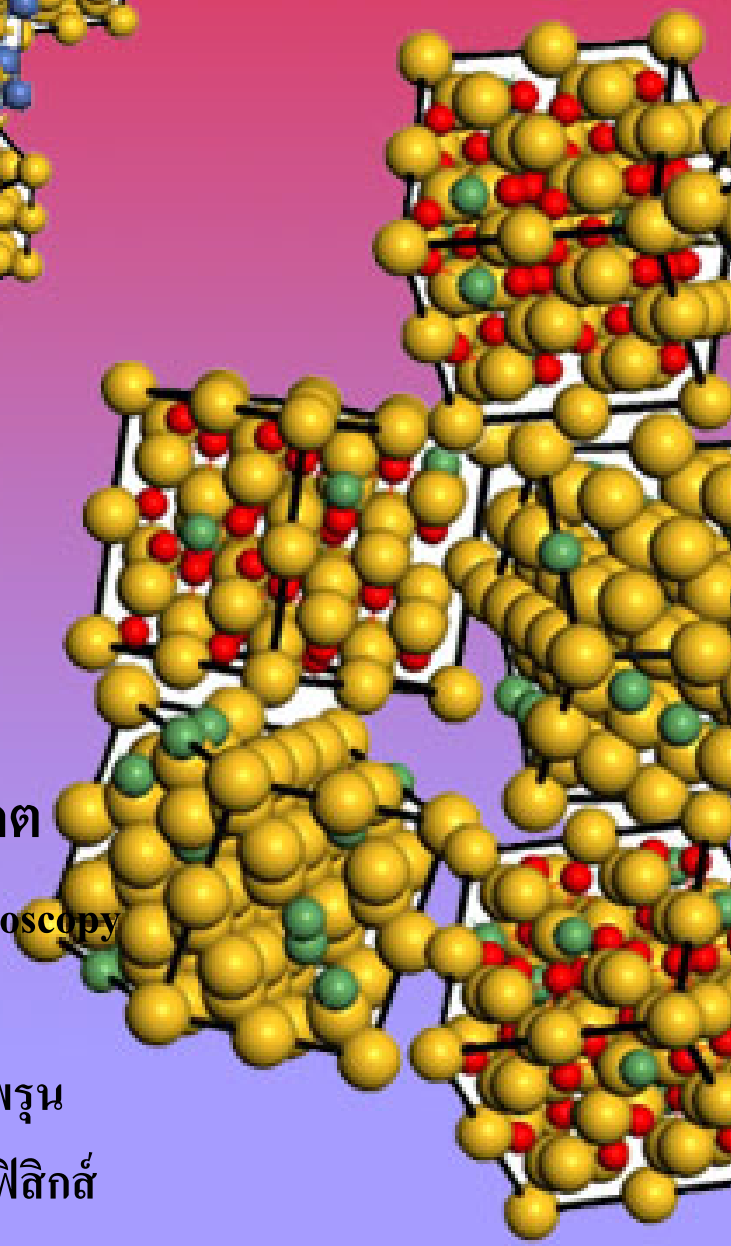
Thai Journal of Physics

วารสารสำหรับผู้ที่รักและสนใจในแวดวงฟิสิกส์

ISSN 0857-1449

ปีที่ 30 ฉบับที่ 3-4 กันยายน 2556 – กุมภาพันธ์ 2557





นาโนซิลิกอน:

วัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกสำหรับอนาคต

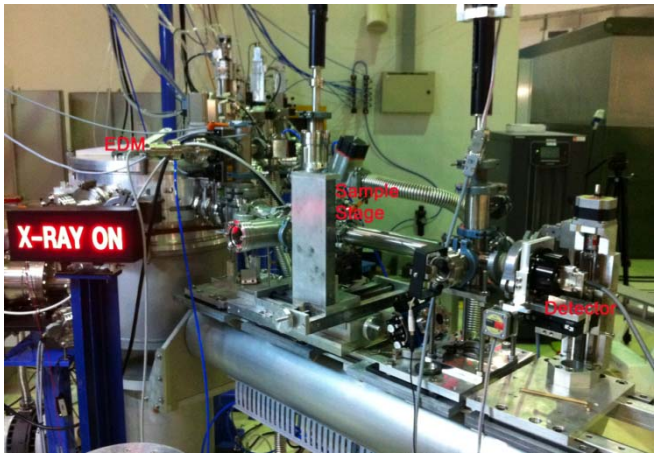
Time-Resolved X-ray Absorption Spectroscopy

ออสโมซิสและอุณหพลศาสตร์

อนุภาคนาโนแม่เหล็กกับแก้วชีวภาพแบบรูพรุน

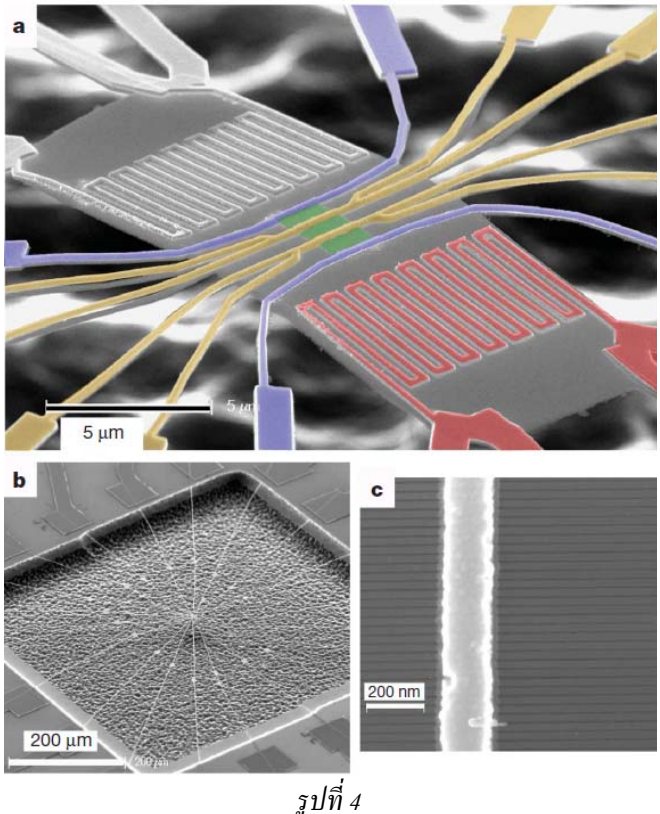
ผลการแปลงลาปลาซและการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์

รูปประกอบจากบทความ “Time-Resolved X-ray Absorption Spectroscopy (TRXAS)” หน้า 2-3

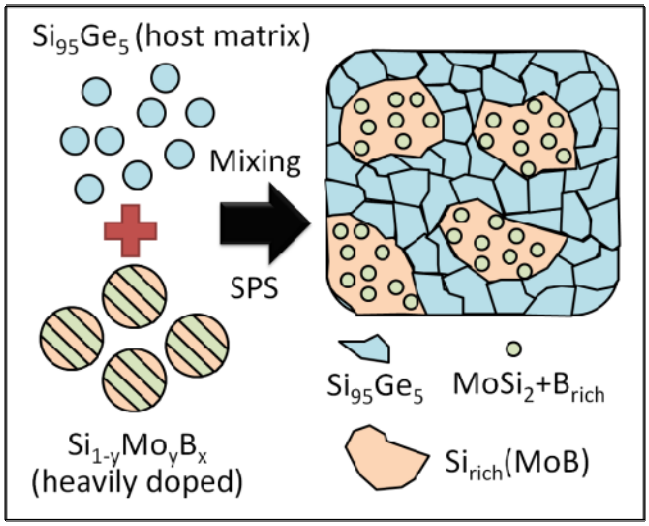


รูปที่ 4

รูปประกอบจากบทความ “นาโนซิลิกอน: วัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกสำหรับอนาคต” หน้า 9-10

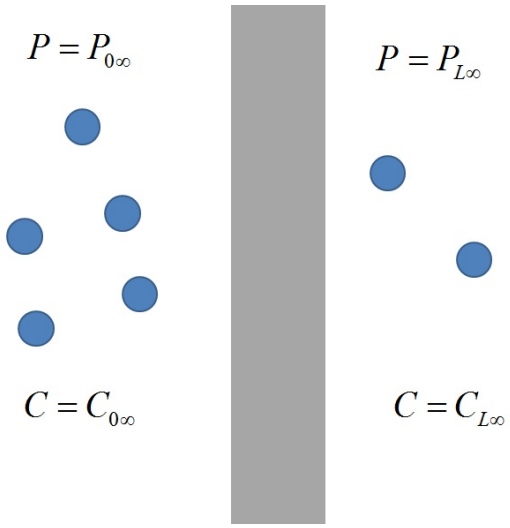


รูปที่ 4



รูปที่ 9

รูปประกอบจากบทความ “ออสโมซิสและอุณหพลศาสตร์” หน้า 11-14



รูปที่ 1

สารบัญ

สวัสดี

เนื่องจากทางกองบรรณาธิการได้รับบทความมาจำนวนน้อยในช่วงหลัง วารสารฉบับล่าสุดนี้จึงขอรวมวารสารฉบับที่ 3 และ 4 เข้าด้วยกัน จึงขอโอกาสประชาสัมพันธ์ให้ผู้สนใจเขียนบทความสามารถส่งบทความของท่านมาได้โดยตรงที่อีเมลของผม worawat@g.sut.ac.th

ทั้งนี้บทความที่จะส่งมาให้พิจารณานั้นสามารถเป็นเรื่องอะไรก็ได้ที่มีเนื้อหาส่วนใดส่วนหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับฟิสิกส์ (ได้ทุกแขนง) หรือเป็นสาขาใกล้เคียง เช่น เคมี คณิตศาสตร์ (ที่อาจได้ใช้ในฟิสิกส์) หรือ เนื้อหาเกี่ยวข้องการเรียนการสอน เป็นต้น ถ้ามีข้อซักถามประการใดกรุณาติดต่อมาได้โดยตรงผ่านทางอีเมลนะครับ จักขอบพระคุณยิ่ง

กองบรรณาธิการ

ติดต่อกองบรรณาธิการ วารสารฟิสิกส์ไทย สมาคมฟิสิกส์ไทย สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี 111 ถนนมหาวิทยาลัย ต. สุรนารี อ. เมือง จ. นครราชสีมา 30000 โทรศัพท์: 044-224549 โทรสาร: 044-224651 อีเมล์: worawat@g.sut.ac.th **วารสารฟิสิกส์ไทย** เป็นวารสารราย 3 เดือน มีวัตถุประสงค์เพื่อเผยแพร่สาระ ข่าวสาร และเป็นสื่อสัมพันธ์ในมวลหมู่สมาชิกและผู้ที่สนใจในแวดวงฟิสิกส์ ส่งเสริมให้เกิดการแลกเปลี่ยนข้อมูลและประสบการณ์เกี่ยวกับฟิสิกส์ในวงกว้างที่สร้างสรร โดยความคิดเห็นและทัศนะที่ปรากฏอยู่ในบทความต่างๆ เป็นเฉพาะของผู้เขียนแต่ละท่าน สมาคมฟิสิกส์ไทยไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป **Website:** www.thps.org

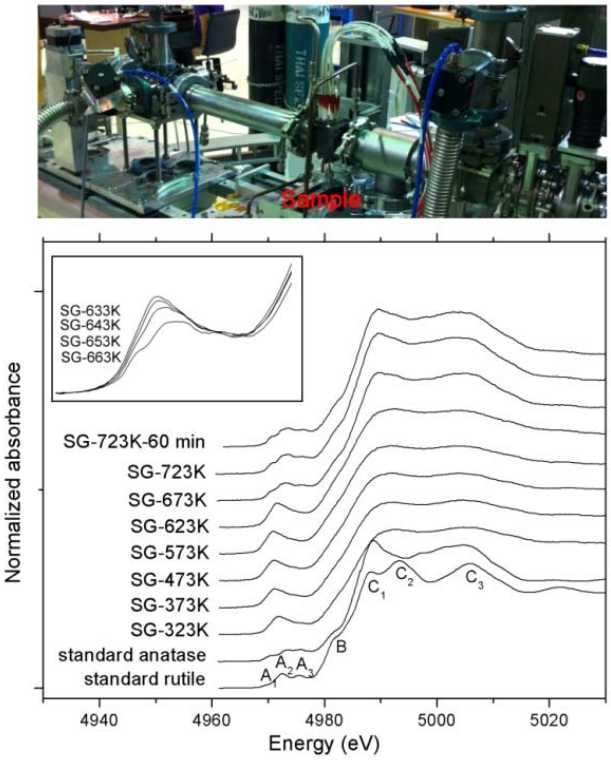
Time-Resolved X-ray Absorption Spectroscopy (TRXAS)

ยิ่งยศ ภู่อาภรณ์[1] และ วันวิสา ลิ้มพิรัตน์[2]

TRXAS เป็นเทคนิคที่วัดการดูดกลืนรังสีเอกซ์ของอะตอมที่สนใจในตัวอย่าง โดยมีจุดเด่นที่ใช้เวลาในการวัดตัวอย่างเป็นวินาที ทำให้มีความสามารถการวัดตัวอย่างที่ต้องการดูการเปลี่ยนแปลงทางโครงสร้างของตัวอย่างภายใต้สภาวะแวดล้อมต่างๆ (in-situ measurement) เช่น ภายใต้สภาวะความร้อน ความดัน และบรรยากาศของแก๊สเป็นต้น

ตัวอย่างเช่น การศึกษาโครงสร้างของ TiO_2 เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา ซึ่งเป็นสารที่มีประโยชน์หลากหลาย เช่นใช้ในยาสีฟันและสีทาอาคาร TiO_2 เป็นสารที่ปลอดภัยและถูกใช้ในเครื่องสำอางค์ ลิปสติก ครีมกันแดด แป้ง สบู่ หรือใช้ในผลิตภัณฑ์บรรจุอาหาร และผสมในยาสูบ ซึ่ง TiO_2 สามารถแบ่งได้เป็น 2 ชนิดคือ rutile และ anatase ซึ่งมีโครงสร้างของผลึกแตกต่างกันและให้สีที่ต่างกันคือ Rutile สีจะออกโทนเหลืองกว่า ส่วน Anatase สีจะออกโทนฟ้ากว่าเล็กน้อย การใช้ TiO_2 ผสมในผลิตภัณฑ์บางครั้งจะพบปัญหาเรื่อง การให้สีออกเหลือง ในพลาสติกบางประเภท และบางเกรดได้ ทำให้ส่งผลต่อราคาของผลิตภัณฑ์นั้นๆ แต่โดยเทคนิค TRXAS จะทำให้เห็นว่าเราสามารถดูการเปลี่ยนแปลงของโครงสร้าง TiO_2 โดยจะเกิดโครงสร้างแบบแอนาเทส (anatase) ที่อุณหภูมิระหว่าง 633-663 K ดังแสดงในรูปที่ 1

ในขณะเดียวกันนั้นเทคนิค TRXAS ก็ได้ใช้ในการศึกษาโครงสร้างของโคบอลต์ (Co) สำหรับการสังเคราะห์แบบฟิชเชอร์-โทรปส์ (Fischer-Tropsch) ซึ่งเป็นกระบวนการเปลี่ยนแก๊สสังเคราะห์ที่ได้จากถ่านหินและธรรมชาติเป็นแก๊สสะอาด ซึ่งการปรับปรุงความสามารถในการเร่งปฏิกิริยาของโคบอลต์ในปฏิกิริยาฟิชเชอร์-โทรปส์ทำได้โดยการเพิ่มการกระจายตัวบนตัวรองรับ ที่ไม่ขัดขวางความสามารถในการถูกรีดิวส์ของโคบอลต์ ซึ่งปกติแล้วต้องอยู่ในรูป Co (0) ถึงจะทำปฏิกิริยาฟิชเชอร์-โทรปส์ได้ดี ซึ่งเทคนิค TRXAS นั้นสามารถดูการติดตามการเปลี่ยนแปลงทางโครงสร้างของโคบอลต์ออกไซด์ระหว่างกระบวนการรีดักชันด้วยแก๊สไฮโดรเจน จาก Co_3O_4 ไปเป็น Co โดยผ่านโคบอลท์ออกไซด์ที่มีโครงสร้าง CoO ดังรูปที่ 2 ซึ่งจะทำให้พัฒนาความสามารถในการเกิดปฏิกิริยาของโคบอลต์บนตัวรองรับได้



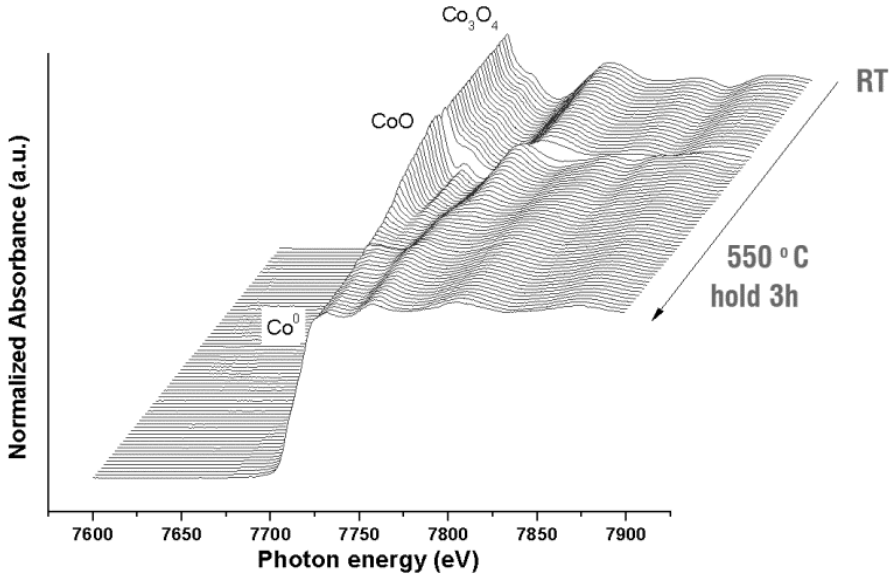
รูปที่ 1 แสดง (บน) การติดตั้งสถานีทดลองสำหรับการให้ความร้อนแก่ตัวอย่าง (ล่าง) การติดตามการเปลี่ยนแปลงทางโครงสร้างของ TiO_2 ระหว่าง 323 K ถึง 723 K ภายใต้บรรยากาศปกติ ใช้เวลาเก็บข้อมูล 2 วินาทีต่อสเปกตรัม (200 ms x 10 scans) สามารถตรวจพบการเกิดโครงสร้างแบบแอนาเทส (anatase) ที่อุณหภูมิระหว่าง 633-663 K

ติดต่อขอใช้บริการ

สถาบันวิจัยแสงซินโครตรอน (องค์การมหาชน)

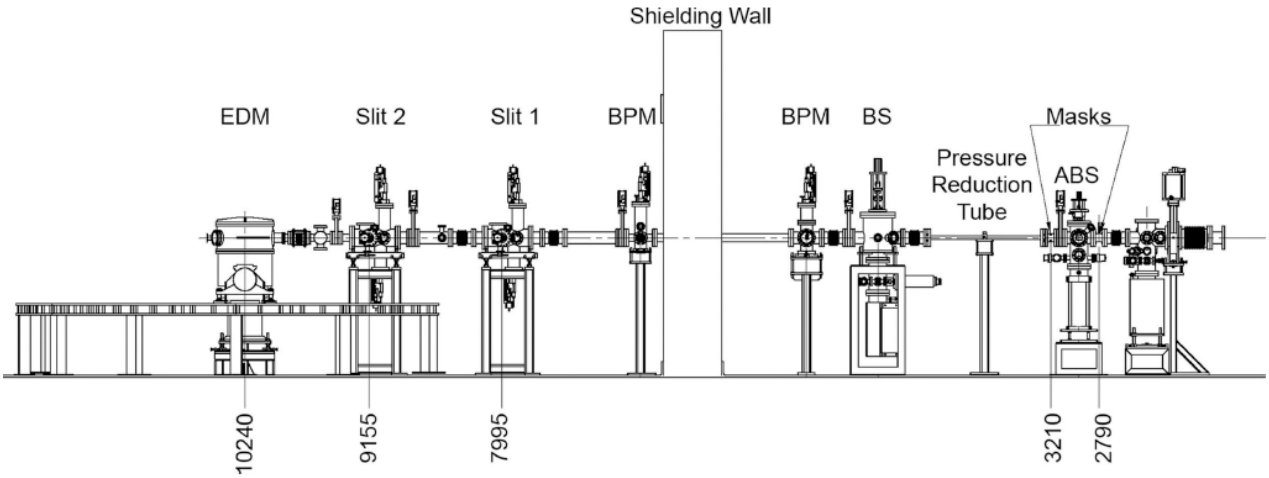
อาคาร สิรินธรวิชโชทัย เลขที่ 111 ถ.มหาวิทยาลัย ต.สุรนารี อ.เมือง จ.นครราชสีมา 30000 เวปไซต์ www.slri.or.th Facebook : www.facebook.com/timeresolved.xrayabsorption หน่วยงานบริการผู้ใช้ (User's office) โทรศัพท์ 044217040 ต่อ 1605-1607 Email useroffice@slri.or.th

[1] ผู้ช่วยผู้อำนวยการฝ่ายสถานีวิจัย (ดร.) [2] นักวิทยาศาสตร์ระบบลำเลียงแสง (ดร.) สถาบันวิจัยแสงซินโครตรอน (องค์การมหาชน)

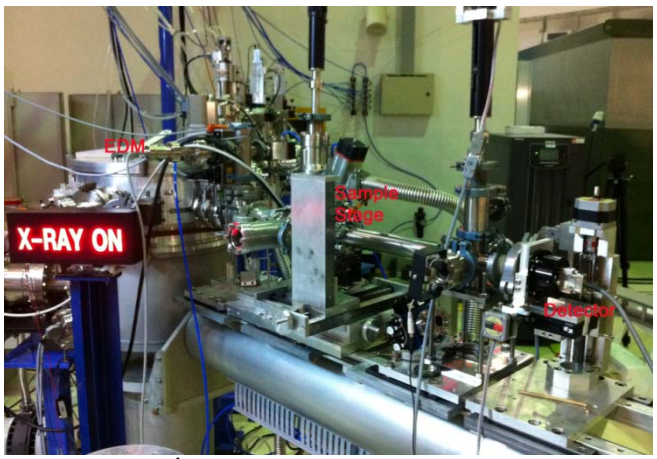


รูปที่ 2 การติดตามการเปลี่ยนแปลงทางโครงสร้างของโคบอลท์ออกไซด์ระหว่างกระบวนการรีดักชันด้วยแก๊สไฮโดรเจนที่อุณหภูมิระหว่าง RT K ถึง 500 °C ใช้เวลาเก็บข้อมูล 10 วินาทีต่อสปกตรัม (1000 ms x 10 scans) สามารถตรวจพบการเกิดรีดักชันของ Co_3O_4 ไปเป็น Co โดยผ่านโคบอลท์ออกไซด์ที่มีโครงสร้าง CoO

โดยเทคนิค TRXAS นี้ได้ตั้งอยู่ที่สถาบันวิจัยแสงซินโครตรอน (องค์การมหาชน) ดังรูปที่ 3 และ 4



รูปที่ 3 ระบบลำเลียงแสง TRXAS



รูปที่ 4 แสดงการสถานีทดลอง TRXAS

นาโนซิลิกอน: วัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกสำหรับอนาคต

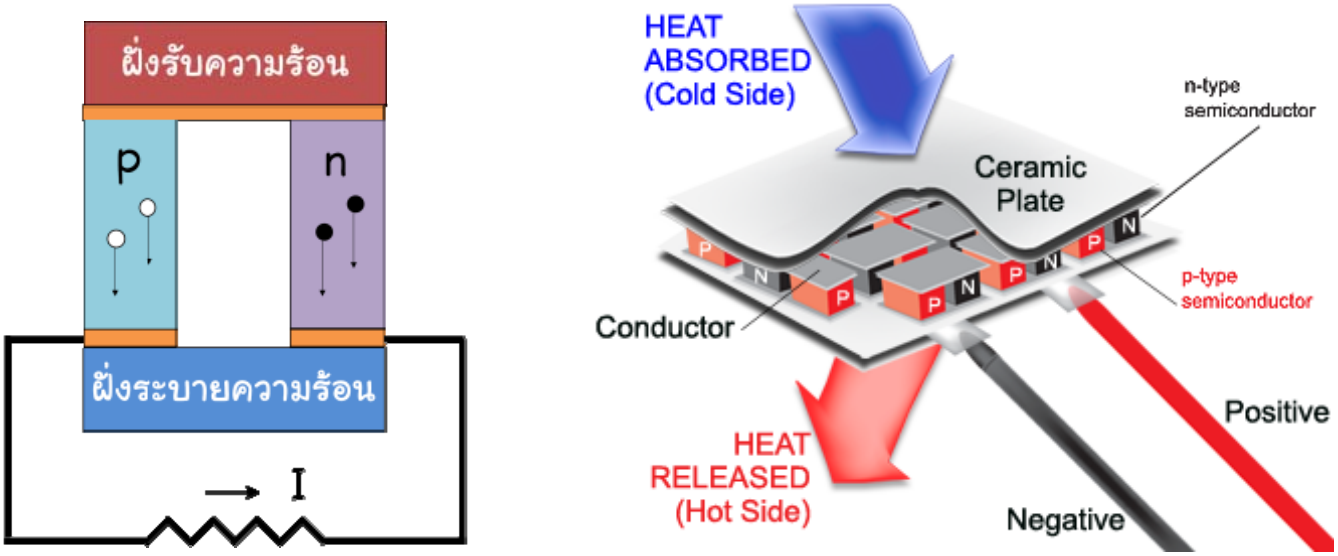
สุปรีดิ์ พินิจสุนทร[1]

บทนำ

เทคโนโลยีเทอร์โมอิเล็กทริก คือเทคโนโลยีที่สามารถเปลี่ยนพลังงานความร้อนให้เป็นพลังงานไฟฟ้าได้โดยตรง มีข้อดีกว่าเทคโนโลยีที่เกี่ยวข้องกับพลังงานด้านอื่นๆได้แก่ เป็นเทคโนโลยีที่สะอาด เป็นมิตรกับสิ่งแวดล้อม มีระบบการทำงานที่เงียบเพราะไม่ต้องมีชิ้นส่วนเครื่องยนต์ที่เคลื่อนไหว นอกจากนี้แหล่งความร้อนที่สามารถนำมาใช้ได้ อาจมาจากความร้อนจากแสงอาทิตย์ ความร้อนจากใต้พิภพ หรือความร้อนที่สูญเสียจากเครื่องยนต์ที่ขับเคลื่อนด้วยพลังงานในรูปแบบอื่นๆ ไม่ว่าจะเป็นพลังงานไฟฟ้า (มอเตอร์) พลังงานเคมี (แบตเตอรี) หรือ พลังงานกลจากการจุดระเบิดของเครื่องยนต์ ถ้าเราสามารถนำความร้อนที่สูญเปล่านี้กลับมาใช้ใหม่ ก็จะทำให้เกิดการใช้พลังงานอย่างมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้นและเกิดประโยชน์สูงสุด

อุปกรณ์เทอร์โมอิเล็กทริกประกอบไปด้วยวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกซึ่งมีอยู่สองประเภทได้แก่ ชนิดพี และชนิดเอ็น เมื่อนำวัสดุทั้งสองชนิดมาต่อเข้าด้วยกัน ดังรูปที่ 1 (ซ้าย) ให้ฝั่งหนึ่งรับความร้อน ส่วนอีกฝั่งระบายความร้อน ในตัววัสดุชนิดพีจะมีการเคลื่อนที่ของโฮลซึ่งเป็นพาหะหลักจากด้านร้อนมาสู่ด้านที่เย็นกว่า (เกิดการสะสมของประจุบวก) ในทำนองเดียวกันในวัสดุชนิดเอ็นก็จะมีการไหลของอิเล็กตรอนไปสะสมอยู่ฝั่งที่เย็นกว่า (เกิดการสะสมของประจุลบ) จากปรากฏการณ์ดังกล่าว จะทำให้เกิดแรงเคลื่อนไฟฟ้าขับเคลื่อนให้มีกระแสไฟฟ้าไหลได้เมื่อต่อวงจรเข้ากับโหลดภายนอก โดยทิศทางการไหลของกระแส เป็นไปตามรูปที่ 1 (ซ้าย) โดยทั่วไปแล้วแรงเคลื่อนไฟฟ้าของอุปกรณ์เทอร์โมอิเล็กทริกจะมีค่าค่อนข้างต่ำคือประมาณ 100-200 μV ต่อความแตกต่างอุณหภูมิ 1 องศาเซลเซียส อย่างไรก็ตามสามารถเพิ่มแรงดันไฟฟ้าได้โดยการใช้วัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกทั้งพีและเอ็นหลายๆชิ้นมาต่ออนุกรมเข้าด้วยกัน ดังแสดงในรูปที่ 1 (ขวา)

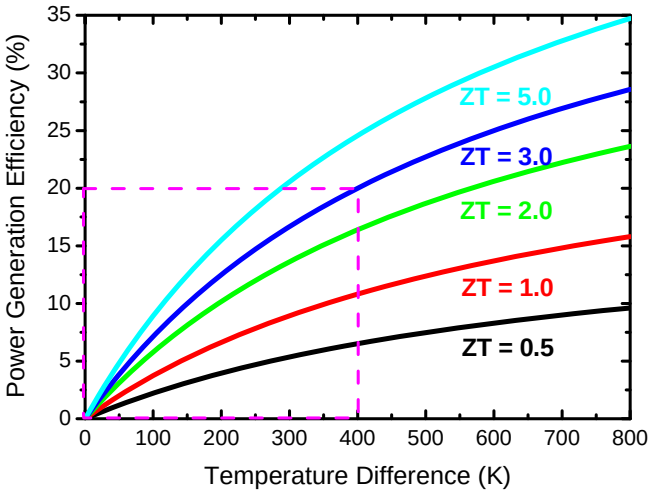
ประสิทธิภาพของอุปกรณ์เทอร์โมอิเล็กทริกขึ้นอยู่กับค่า Dimensionless Figure-of-Merit (ZT) ดังรูปที่ 2 จะเห็นได้ว่า ถ้าสามารถเพิ่มค่า ZT ขึ้นประสิทธิภาพการผลิตพลังงานไฟฟ้าจากความร้อนจะเพิ่มสูงตามไปด้วย ในปัจจุบันค่า ZT ของวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกที่ใช้ในท้องตลาดมีค่า ZT ประมาณ 1.0 ถ้าให้ความแตกต่างของอุณหภูมิด้านร้อนเย็นมีค่า 300 K ประสิทธิภาพการ



รูปที่ 1 แสดงการต่อวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกชนิดพีและเอ็นเข้าด้วยกันเพื่อเป็นอุปกรณ์ผลิตกระแสไฟฟ้าจากความร้อน (รูปขวา จาก [1])

[1] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ (ดร.) ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

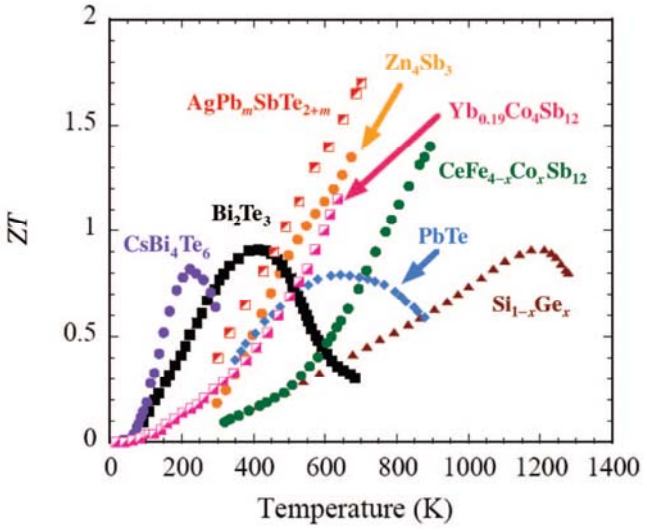
ผลิตพลังงานจะไม่ถึง 10% ดังนั้นจึงจำเป็นจะต้องพัฒนาวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกให้มีค่า ZT ที่สูงขึ้น หากสามารถปรับปรุงให้ ZT มีค่าประมาณ 3.0 และสามารถใช้งานได้ที่ความแตกต่างอุณหภูมิ 400 K ประสิทธิภาพของอุปกรณ์เทอร์โมอิเล็กทริกจะสามารถสูงถึง 20% ซึ่งเทียบเท่ากับประสิทธิภาพเครื่องยนต์ของรถยนต์ในปัจจุบัน



รูปที่ 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างประสิทธิภาพในการผลิตกระแสไฟฟ้าจากความร้อนกับค่า ZT และผลต่างของอุณหภูมิด้านร้อนกับด้านเย็น

วัสดุเทอร์โมอิเล็กทริก

วัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกโดยนิยามทั่วๆ ไปคือวัสดุที่สามารถเปลี่ยนพลังงานความร้อนเป็นพลังงานไฟฟ้าได้ ดังที่กล่าวไปแล้วว่าประสิทธิภาพการเปลี่ยนพลังงานความร้อนเป็นพลังงานไฟฟ้าขึ้นกับค่า ZT ซึ่งค่า ZT ของวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกถูกนิยามไว้ว่า $ZT = S^2\sigma T / \kappa$ โดย S คือสัมประสิทธิ์ซีเบค (Seebeck coefficient) วัดจากค่าความต่างศักย์ที่เกิดขึ้นของสองฝั่งของวัสดุเมื่อให้อุณหภูมิของทั้งสองด้านต่างกัน 1 K σ คือสภาพนำไฟฟ้า (electrical conductivity) และ κ คือสภาพนำความร้อน (thermal conductivity) จากสมการจะเห็นได้ว่า การที่จะให้ค่า ZT ของวัสดุมีค่าสูง ต้องทำให้ค่า S และ σ มีค่าสูง ในขณะที่ค่า κ ต้องมีค่าน้อย ซึ่งทำได้ยากมากในทางปฏิบัติ เพราะตัวแปรเหล่านี้มีความสัมพันธ์กัน โดยทั่วไป วัสดุที่มีค่า σ สูงจะมีค่า κ สูงด้วย แต่ S จะมีค่าน้อย ในทางกลับกัน ค่า S ที่สูงจะพบได้มากในวัสดุที่มีค่า σ และ κ ต่ำ ในงานวิจัยด้านวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริก เป็นที่ยอมรับกันทั่วไปว่า ค่า ZT ที่สูงจะสามารถพบได้ในวัสดุสารกึ่งตัวนำที่มีปริมาณการเจือมากๆ มีความเข้มข้นของพาหะประมาณ 10^{19}–10^{21} ต่อลูกบาศก์เซนติเมตร [2] นอกจากนี้ ค่า ZT ยังขึ้นกับอุณหภูมิด้วย ตัวอย่างค่า ZT ที่ขึ้นกับอุณหภูมิของวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกชนิดต่างๆแสดงดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 ค่า ZT ของวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกชนิดต่างๆ เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ [3]

ในปัจจุบันวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกที่มีค่า ZT สูงสุดที่อุณหภูมิห้องได้แก่สารประกอบของ Bi และ Te เป็นหลัก ส่วนที่อุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิห้อง วัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกที่ดีอยู่ในกลุ่มของสารประกอบ Pb เป็นหลัก ถึงแม้ว่าสารประกอบเหล่านี้จะให้ค่า ZT ที่สูง แต่ก็เป็นสารพิษ หรือสารหายาก หรือราคาแพง จากรูปที่ 3 ยังมีสารประกอบอีกบางชนิดที่ให้ค่า ZT ที่สูง เช่น Zn_4Sb_3 หรือ สารประกอบของ $CoSb_3$ อย่างไรก็ตามวัสดุเหล่านี้ยังอยู่ในขั้นตอนของการวิจัย สมบัติเชิงกลของ Zn_4Sb_3 ยังไม่เหมาะสมนำไปใช้งาน ส่วนสารประกอบ $CoSb_3$ ยังมีวิธีการสังเคราะห์ที่ยุ่งยาก ใช้เวลานาน และไม่เสถียรที่อุณหภูมิสูง ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมองหาวัสดุอื่นๆ เพื่อเป็นทางเลือกสำหรับอุปกรณ์เทอร์โมอิเล็กทริกประสิทธิภาพสูงในอนาคต

การใช้ซิลิกอนเป็นวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริก

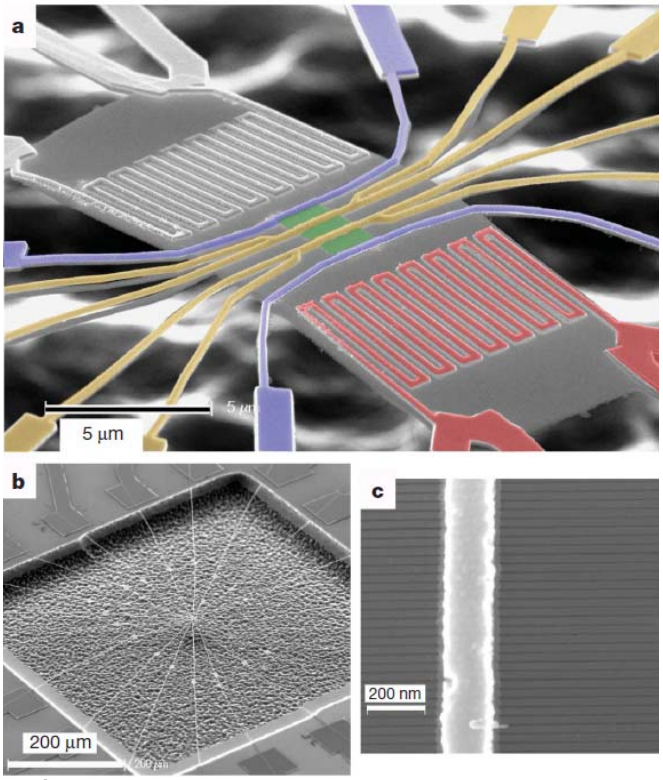
ซิลิกอนเป็นหนึ่งในธาตุที่มีปริมาณมากที่สุดในโลก เป็นสารที่ไม่เป็นพิษ มีราคาถูกเมื่อเทียบกับวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกชนิดอื่นๆ มีความเสถียรที่อุณหภูมิสูง หาได้ง่าย นอกจากนี้ เนื่องจากซิลิกอนเป็นหัวใจของเทคโนโลยีสารกึ่งตัวนำ ดังนั้นในปัจจุบันจึงมีองค์

ความรู้อย่างมากมายในกระบวนการผลิตซิลิกอน หรือการควบคุมการเจือเพื่อให้ได้ความเข้มข้นพาหะที่ต้องการ หรือสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้องกับซิลิกอน ดังนั้นการประยุกต์ใช้ซิลิกอนเพื่อเป็นวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริก น่าจะเป็นทางออกสำหรับอุปกรณ์เทอร์โมอิเล็กทริกประสิทธิภาพสูงในอนาคต

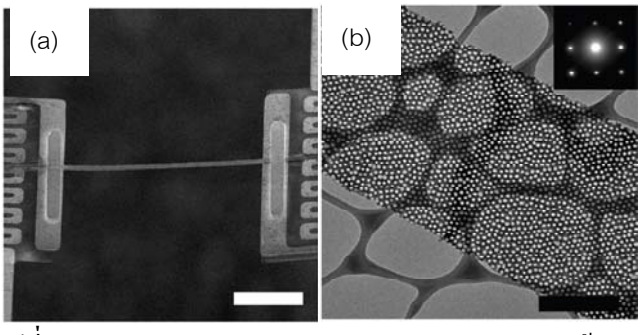
ที่ผ่านมา ซิลิกอนบริสุทธิ์ไม่ได้รับความสนใจมากนักในการใช้งานเชิงเทอร์โมอิเล็กทริก ทั้งนี้เนื่องมาจากปัญหาการนำความร้อนที่ดีมาก ซิลิกอนบริสุทธิ์มีค่า κ ~150 W/mK สำหรับผลึกเดี่ยว และ ~80 W/mK สำหรับพหุผลึก ทำให้ค่า ZT ของซิลิกอนบริสุทธิ์มีค่าน้อยมาก ได้มีผู้เสนอหลายแนวทางในการแก้ปัญหานี้ หนึ่งในนั้นคือการใช้อัลลอยด์ของ SiGe แทนที่ซิลิกอนบริสุทธิ์ การแทนที่ของ Ge ในโครงสร้างของ Si ทำให้เกิดจุดบกพร่อง และความไม่ต่อเนื่องของแลตทิซผลึก ทำให้ค่าสภาพนำความร้อนลดลงอย่างมาก ตัวอย่างเช่นการใช้อัลลอยด์ $Si_{80}Ge_{20}$ ทำให้ค่า κ ลดลงเหลือเพียง 4-5 W/mK ส่งผลให้ได้ค่า ZT สูงถึง 0.5 สำหรับชนิดพี และ 0.9 สำหรับชนิดเอ็น ที่อุณหภูมิ 900 °C ในแง่การประยุกต์ใช้งาน มีการใช้วัสดุ $Si_{80}Ge_{20}$ เป็นอุปกรณ์เทอร์โมอิเล็กทริกที่ใช้แหล่งกำเนิดความร้อนจากรังสี (Radioistope thermoelectric generator, RTG) ซึ่งใช้เป็นแหล่งกำเนิดพลังงานไฟฟ้าในยานอวกาศขององค์การนาซ่า (NASA) ตั้งแต่ทศวรรษ 1960[4] จึงเป็นการทดสอบอย่างดีว่าวัสดุดังกล่าวมีเสถียรภาพการใช้งานเป็นเวลาหลายสิบปีโดยไม่มีการเสื่อมสภาพ อย่างไรก็ตาม ในแง่ของการพัฒนาประสิทธิภาพหลังจากทศวรรษ 1960 การปรับปรุงค่า ZT เป็นไปอย่างช้ามากและค่า ZT เพิ่มขึ้นน้อยมากๆ

นาโนซิลิกอนสำหรับวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกประสิทธิภาพสูง

เพื่อที่จะเพิ่มค่า ZT ให้สูงขึ้น ได้มีการประยุกต์ใช้โครงสร้างระดับนาโนสำหรับซิลิกอน ก่อนหน้านี้มีการทำนายว่าวัสดุที่มีโครงสร้างระดับนาโนจะสามารถเพิ่มค่า S และ σ ได้พร้อมๆกัน [5] ยิ่งไปกว่านั้น โครงสร้างระดับนาโนยังสามารถลดค่า κ จากการกระเจิงของโฟนอนที่รอยต่อของพื้นผิว [5] หลักการนี้ได้ถูกนำไปใช้ในหลายการทดลองที่เกี่ยวข้องกับวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริก เช่น ในสารประกอบคอมโพสิตของ PbTe และ SrTe ที่มีโครงสร้างระดับนาโน มีการทดลองพบว่าค่า ZT สามารถมีค่าสูงสุดถึง 2.2 [6] สำหรับวัสดุที่มีซิลิกอนเป็นหลัก มีความพยายามที่จะลดขนาดของของซิลิกอนให้เล็กลงเป็นระดับนาโน เพื่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของสมบัติเทอร์โมอิเล็กทริก ยกตัวอย่างเช่น มีการทดลองเพื่อแสดงว่าเมื่อลดขนาดของซิลิกอนลงให้กลายเป็นเส้นลวดนาโนที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 20 นาโนเมตร ดังรูปที่ 4 ค่า ZT สามารถมีค่าได้สูงถึง 1.0 [7] อีกตัวอย่างหนึ่ง มีการคำนวณซึ่งแสดงว่าซิลิกอนที่มีรูพรุนระดับนาโน สามารถเพิ่มค่า ZT ได้ [8] และมีการแสดงให้เห็นเชิงการทดลองสำหรับซิลิกอนที่บางเป็นแผ่น (เมมเบรน) ขนาดกว้าง 3 ไมโครเมตร เมื่อทำการใส่รูพรุนประมาณ 35 % จะสามารถทำให้ค่า ZT สูงถึง 0.4 ได้ [9] อย่างไรก็ตามโครงสร้างของซิลิกอนที่มีมิติต่ำ (ลวดนาโน คือ 1 มิติ และเมมเบรน คือ 2 มิติ) ไม่สามารถผลิตได้ปริมาณมากๆ หรือนำไปใช้งานได้ทั่วไป ดังนั้นเพื่อที่จะให้เกิดประโยชน์สูงสุด ต้องมีการพัฒนาและผลิตก้อนซิลิกอน (bulk silicon) ที่มีโครงสร้างระดับนาโนให้ได้ปริมาณมากๆ

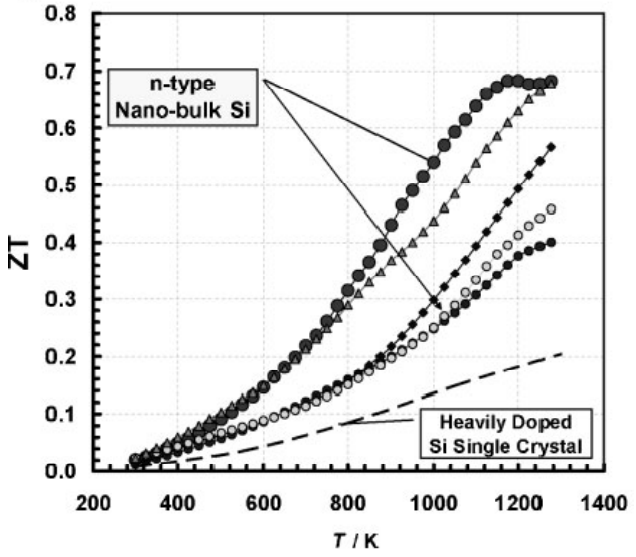


รูปที่ 4 (a) การวัดสมบัติเทอร์โมอิเล็กทริกของเส้นลวดซิลิกอนนาโน แถบสีเขียวคือเส้นลวดซิลิกอนนาโนที่เรียงตัวกันอย่างเป็นระเบียบ เส้นสีเหลืองไว้สำหรับวัดอุณหภูมิ เส้นสีฟ้าวัดกระแสไฟฟ้า เส้นสีแดงเป็นขดลวดให้ความร้อน รูป (b) แสดงอุปกรณ์ในรูป (a) ที่กำลังขยายต่ำ รูป (c) แสดงการเรียงตัวกันของเส้นลวดซิลิกอนนาโนขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 20 nm ต่อเข้ากับขั้วแพลตทินัมอิเล็กโทรด [7]



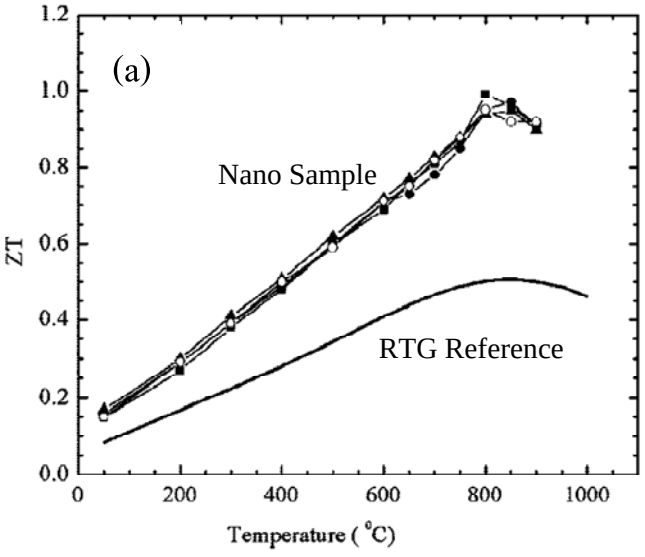
รูปที่ 5 (a) รูปถ่าย SEM ของเมมเบรนของซิลิกอนกว้าง 3 ไมโครเมตร ต่อเข้ากับอุปกรณ์เพื่อทำการวัดค่าสภาพนำความร้อน (b) รูปถ่าย TEM ของเมมเบรนซิลิกอนซึ่งมีรูพรุนอยู่ประมาณ 35% (รูปเล็ก) แสดงรูปแบบการเลี้ยวเบนของอิเล็กตรอน [9]

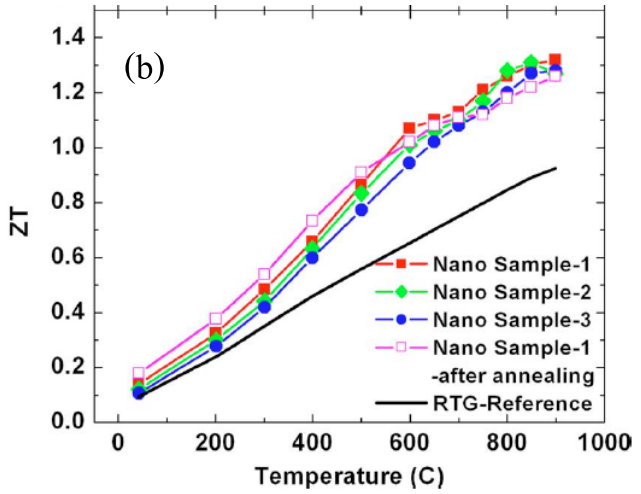
ในงานวิจัยที่ผ่านมาของซิลิกอนชนิดก้อน มีการแสดงให้เห็นว่าเมื่อผลึกของซิลิกอนมีขนาดเล็กกว่า 20 นาโนเมตร จะทำให้เกิดการกระเจิงของโฟนอนเป็นอย่างมากเนื่องจากมีขอบเกรนเป็นจำนวนมาก แต่การกระเจิงของโฟนอนนี้ ไม่ได้ส่งผลกับค่าแฟกเตอร์กำลัง (power factor) ซึ่งนิยามไว้ว่าคือ $S^2\sigma$ [10] คำอธิบายของการทดลองนี้อยู่ที่ความแตกต่างของค่าระยะเฉลี่ยของการกระเจิง (mean free path) ระหว่างอิเล็กตรอนและโฟนอน ระยะเฉลี่ยการกระเจิงของอิเล็กตรอนมีค่าเพียงไม่กี่นาโนเมตร ในขณะที่ระยะเฉลี่ยการกระเจิงของโฟนอนสามารถมีค่าได้ตั้งแต่น้อยกว่า 1 นาโนเมตร ไปจนถึงหลายร้อยนาโนเมตร จึงทำให้ผลึกที่มีขนาดเล็กกว่า 20 นาโนเมตร ส่งผลต่อโฟนอนมากกว่าอิเล็กตรอน จึงสามารถลดค่า κ ลงได้น้อยกว่า 10 W/mK ดังนั้นค่า ZT จึงมีค่าสูงถึง 0.4 – 0.7 สำหรับผลึกซิลิกอนนาโนชนิดเอ็นที่ถูกเจืออย่างมาก [10] ดังแสดงในรูปที่ 6



รูปที่ 6 แสดงค่า ZT ของก้อนผลึกนาโนซิลิกอนชนิดเอ็น เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ จะเห็นได้ว่า ค่า ZT เพิ่มขึ้นอย่างมากเมื่อเทียบกับก้อนซิลิกอนผลึกเดี่ยว

อย่างไรก็ตาม ถึงแม้การใช้ผลึกนาโนของซิลิกอนจะสามารถเพิ่มค่า ZT ได้มากกว่า 3.5 เท่าเมื่อเทียบกับซิลิกอนที่มีผลึกเดี่ยว ค่า ZT ที่ได้ก็ยังต่ำกว่าของอัลลอยด์ SiGe ดังนั้นแนวทางในการเพิ่มค่า ZT ให้สูงยิ่งขึ้นไปอีกคือการใช้ผลึกนาโนของอัลลอยด์ SiGe มีงานวิจัยที่ผ่านมาเมื่อไม่นานนี้ได้แสดงให้เห็นว่าเมื่อใช้เกรนขนาดเล็กกว่า 20 นาโนเมตร อัลลอยด์ของ SiGe ที่มีผลึกนาโน (ทั้งชนิดพีและชนิดเอ็น) สามารถมีค่า κ ได้ต่ำถึง 2.5 W/mK โดยไม่ทำให้ค่าแฟกเตอร์กำลังเปลี่ยนแปลง ค่า ZT มากที่สุดพบที่อุณหภูมิ 900 °C มีค่าเท่ากับ 0.95 สำหรับชนิดพี [11] และ 1.3 สำหรับชนิดเอ็น [12] ดังแสดงในรูปที่ 7 จะเห็นได้ว่าชิ้นงานที่มีผลึกนาโนมีค่า ZT สูงกว่า SiGe ที่ใช้อยู่ใน RTG ขององค์การนาซ่าอยู่มาก นอกจากนี้ อัลลอยด์ที่ใช้ในรูปที่ 7 มีสัดส่วน Si:Ge ประมาณ 80:20 ราคาของ Ge แพงกว่า Si อยู่ประมาณ 100 เท่า จึงได้มีความพยายามที่จะลดสัดส่วนของ Ge ให้น้อยลง ที่ผ่านมา มีการทดลองที่แสดงให้เห็นว่าเมื่อใช้ $Si_{95}Ge_5$ ที่มีผลึกนาโน สามารถให้ค่า ZT ที่ใกล้เคียงกับ $Si_{80}Ge_{20}$ ได้ [13]

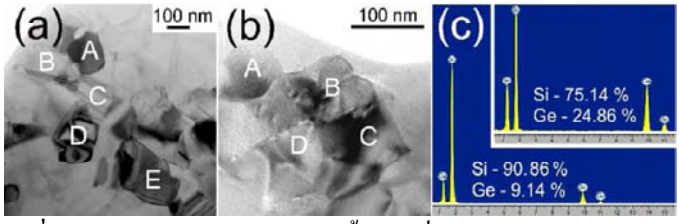




รูปที่ 7 แสดงค่า ZT ของก้อน SiGe แบบผลึกนาโน เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ สำหรับ (a) ชนิดพี [11] และ (b) ชนิดเอ็น [12] ซึ่งจะเห็นได้ว่า ค่า ZT ของทั้งชนิดพีและชนิดเอ็น เพิ่มขึ้นอย่างมากเมื่อเทียบกับชิ้นงาน RTG

ถึงแม้ว่าการใช้โครงสร้างระดับนาโนสามารถลดค่า κ ได้ แต่ยังไม่สามารถเพิ่มค่าแฟกเตอร์กำลังได้ จึงมีการนำเสนอแนวความคิดใหม่เพื่อเพิ่มค่าแฟกเตอร์กำลัง ได้แก่การเจือแบบมอดูเลชัน (modulation doping) [14] ในการเจือเพื่อเพิ่มความหนาแน่นพาหะโดยทั่วไป อะตอมของธาตุหมู่ 3 จะถูกใส่เข้าไปแทนที่ซิลิกอน เพื่อให้เกิดสารกึ่งตัวนำชนิดพี อะตอมของธาตุหมู่ 3 จะถูกไอออไนซ์ เป็นไอออนลบ และเกิดโฮลขึ้นเพื่อเป็นพาหะนำประจุบวก อย่างไรก็ตาม ไอออนลบของธาตุหมู่ 3 ดังกล่าวมีสนามไฟฟ้าเกิดขึ้น ซึ่งผลต่อการเคลื่อนที่ของโฮล ทำให้ค่าสภาพการเคลื่อนที่ (mobility) ของโฮลมีค่าน้อยลง หลักการของการเจือแบบมอดูเลชัน จะแยกไอออนลบของธาตุหมู่ 3 กับโฮลออกจากกัน ทำให้โฮลไม่ถูกรบกวนด้วยสนามไฟฟ้า และมีสภาพการเคลื่อนที่ที่สูงขึ้น หลักการการเจือแบบมอดูเลชันของชนิดเอ็นก็ทำคล้ายๆกัน

ในทางปฏิบัติ จะทำการผสมเมทริกซ์ (เกรนหลัก) เข้ากับอนุภาคนาโน (เกรนรอง) ธาตุที่ถูกเจือจะอยู่ภายในอนุภาคนาโนเท่านั้น ส่วนตัวเมทริกซ์ไม่มีการเจือธาตุใดๆ จากนั้นพาหะที่เกิดขึ้นภายในอนุภาคนาโนจะเคลื่อนที่ออกมาสู่เมทริกซ์ ดังนั้นจึงเป็นการแยกไอออนของธาตุที่ถูกเจือออกจากพาหะที่นำประจุ ทำให้ลดการกระเจิงของพาหะ พาหะจึงสามารถเคลื่อนที่ได้ดีขึ้น มีค่าสภาพการเคลื่อนที่สูงขึ้นและทำให้ค่าแฟกเตอร์กำลังสูงขึ้นตามไปด้วย [14] ในการทดลอง มีการใช้เกรนหลักเป็น $Si_{95}Ge_5$ ส่วนอนุภาคนาโนใช้เป็น $Si_{70}Ge_{30}P_3$ ดังรูปที่ 8 [15] การเลือกตัวเมทริกซ์และอนุภาคนาโน ต้องพิจารณาถึงแถบพลังงานของทั้งสองชนิด ซึ่งต้องแน่ใจว่าจะเกิดการไหลของพาหะจากอนุภาคนาโนไปยังเมทริกซ์ได้ ผลการทดลองพบว่าว่า สามารถทำให้ค่า ZT สูงได้ถึง 1.3 ที่อุณหภูมิ 900 °C สำหรับชนิดเอ็น [15]



รูปที่ 8 (a) – (b) TEM ของชิ้นงานที่ถูกเจือแบบมอดูเลชัน ประกอบไปด้วยเกรน 2 ชนิด ได้แก่ เกรนหลัก ($Si_{95}Ge_5$) และอนุภาคนาโน ($Si_{80}Ge_{20}$) รูป(c) สเปคตรัม EDX แสดงองค์ประกอบของธาตุที่ไม่เหมือนกันของแต่ละบริเวณ [15]

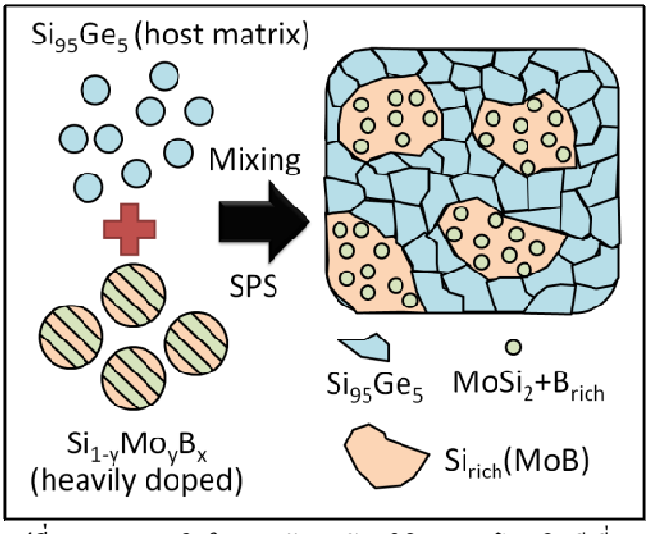
การนำเอาอนุภาคนาโนของสารประกอบซิลิไซด์ (silicide nanoparticle) เข้าไปอยู่ในอัลลอยด์ SiGe ก็เป็นอีกหนึ่งแนวทางในการพัฒนาสมบัติเทอร์โมอิเล็กทริก มีการคำนวณที่แสดงให้เห็นว่าอนุภาคซิลิไซด์สามารถลดค่า κ ได้อย่างมาก แต่ไม่ส่งผลต่อค่า σ [16] ในเชิงการทดลอง มีการนำอนุภาคนาโนของ $MoSi_2$ เติมลงไปในอัลลอยด์ SiGe ชนิดเอ็น พบว่ามีการเพิ่มขึ้นของ σ พร้อมๆกันกับการลดลงของ κ [17] ทำให้มีการทำนายว่าค่า ZT สามารถสูงได้ถึง 1.7 ซึ่งเป็นการเปิดมิติใหม่ของการพัฒนาสมบัติทางเทอร์โมอิเล็กทริกโดยใช้อนุภาคซิลิไซด์ในอัลลอยด์ SiGe [16]

แนวทางในการพัฒนานาโนซิลิกอน

ในปัจจุบันค่า ZT สูงที่สุดของ SiGe ชนิดเอ็นอยู่ที่ 1.5 [18] ซึ่งเทียบเท่ากับประสิทธิภาพเกือบ 20 % ในการผลิตไฟฟ้าจากความร้อน ในขณะเดียวกัน ค่า ZT สูงสุดของ SiGe ชนิดพี ที่เคยมีรายงาน อยู่แค่เพียง 0.95 เท่านั้น [11] ซึ่งยังต่ำกว่าชนิดเอ็นอยู่กว่า 50% เพื่อที่จะสามารถใช้งานเทคโนโลยีเทอร์โมอิเล็กทริกได้อย่างมีประสิทธิภาพ จำเป็นจะต้องมีวัสดุทั้งชนิดพีและชนิดเอ็นที่มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกัน ดังนั้นจึงมีความจำเป็นอย่างเร่งด่วนที่

จะต้องพัฒนาวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกซิลิกอนชนิดพี ให้มีประสิทธิภาพทางเทอร์โมอิเล็กทริกสูงขึ้นกว่าในปัจจุบัน

จากงานเขียนที่ผ่านมา ทำให้ทราบว่าแนวทางในการเพิ่มค่า ZT ในวัสดุที่มีซิลิกอนเป็นองค์ประกอบหลัก คือการรวมเอาหลักการของโครงสร้างระดับนาโน เข้ากับการเจือแบบมอดูเลชัน นอกจากนี้การรวมเอาอนุภาคซิลิไซด์เข้าไปด้วยอาจสามารถเพิ่ม ZT ให้สูงขึ้นมากได้ ดังนั้นผู้เขียนจึงขอเสนอแนวทางในการพัฒนานาโนซิลิกอนชนิดพีเพื่อใช้เป็นวัสดุเทอร์โมอิเล็กทริกสำหรับอนาคตดังนี้



รูปที่ 9 แนวความคิดในการพัฒนาวัสดุซิลิกอนนาโนชนิดพี ที่รวมเอาทั้ง โครงสร้างแบบนาโน การเจือแบบมอดูเลชัน และการรวมอนุภาคซิลิไซด์ เข้าไว้ด้วยกัน

แนวความคิดที่ผู้เขียนเสนอสามารถสรุปได้ดังรูปที่ 9 เกรนหลัก หรือเมทริกซ์ ควรจะใช้ $Si_{95}Ge_5$ เพื่อลดปริมาณ Ge ซึ่งมีราคาแพงมาก ส่วนอนุภาคนาโนควรใช้ SiMoB เพื่อเป็นการผสมผสานหลักการการเจือแบบมอดูเลชันเข้ากับอนุภาคซิลิไซด์ ขั้นต่อมาควบคุมขนาดของเกรนทั้งสองชนิดให้ได้ตามต้องการแล้วทำการผสมเข้าด้วยกัน ขึ้นรูปด้วยเทคนิค สปาร์ก พลาสมา ซินเตอริง (spark plasma sintering, SPS) เพื่อควบคุมการเติบโตของเกรน วัสดุที่ถูกขึ้นรูปแล้วจะประกอบไปด้วย $Si_{95}Ge_5$ เป็นเกรนหลัก ส่วนเกรนรองจะประกอบไปด้วย $MoSi_2$ ปนด้วย B อยู่ในเกรนที่มี Si เป็นหลัก แนวความคิดนี้จะเพิ่มการเคลื่อนที่ของโฮลโดยการแยกไอออนของโบรอนออกจากเกรนหลัก ทำให้เมื่อโฮลถูกถ่ายทอดการเกรนรองไปยังเกรนหลักแล้ว จะสามารถเคลื่อนที่ได้ดีเพิ่มสภาพการเคลื่อนที่ของโฮล ส่วนอนุภาคของ $MoSi_2$ ที่ใส่เข้าไปจะมีส่วนช่วยในการลดค่าสภาพนำความร้อนเพิ่มเติมจากส่วนนาโนเกรนของ SiGe ในเกรนหลัก ทั้งหมดนี้น่าจะมีส่วนทำให้ค่า ZT ของวัสดุในระบบนี้เพิ่มขึ้นสูงได้ อย่างไรก็ตาม แนวความคิดนี้ยังไม่ได้ถูกพิสูจน์ในเชิงการทดลอง และยังรอวันให้นักวิจัยค้นหาว่าจะสามารถเพิ่มค่า ZT ได้จริงหรือไม่

เอกสารอ้างอิง

[1] http://www.buyincoins.com/images/review/1292049635-003.png.

[2] Snyder G. J., Toberer E. S. (2008). "Complex thermoelectric materials". Nat. Mater. 7:105-14.

[3] Tritt T. M., Subramanian M. A. (2006). "Thermoelectric materials, phenomena, and applications: A bird's eye view". MRS Bull. 31:188-94.

[4] http://www.buyincoins.com/images/review/1292049635-003.png.

[5] Snyder G. J., Toberer E. S. (2008). "Complex thermoelectric materials". *Nat. Mater.* 7:105-14.

[6] Tritt T. M., Subramanian M. A. (2006). "Thermoelectric materials, phenomena, and applications: A bird's eye view". *MRS Bull.* 31:188-94.

[7] Yang J. H., Caillat T. (2006). "Thermoelectric materials for space and automotive power generation". *MRS Bull.* 31:224-9.

[8] Dresselhaus M. S., Chen G., Tang M. Y., Yang R. G., Lee H., Wang D. Z., Ren Z. F., Fleurial J. P., Gogna P. (2007). "New directions for low-dimensional thermoelectric materials". *Adv. Mater.* 19:1043-53.

[9] Biswas K., He J. Q., Blum I. D., Wu C. I., Hogan T. P., Seidman D. N., Dravid V. P., Kanatzidis M. G. (2012). "High-performance bulk thermoelectrics with all-scale hierarchical architectures". *Nature* 489:414-8.

[10] Boukai A. I., Bunimovich Y., Tahir-Kheli J., Yu J. K., Goddard W. A., Heath J. R. (2008). "Silicon nanowires as efficient thermoelectric materials". *Nature* 451:168-71.

[11] Lee J. H., Galli G. A., Grossman J. C. (2008). "Nanoporous Si as an Efficient Thermoelectric Material". *Nano Lett.* 8:3750-4.

[12] Tang J. Y., Wang H. T., Lee D. H., Fardy M., Huo Z. Y., Russell T. P., Yang P. D. (2010). "Holey Silicon as an Efficient Thermoelectric Material". *Nano Lett.* 10:4279-83.

[13] Bux S. K., Blair R. G., Gogna P. K., Lee H., Chen G., Dresselhaus M. S., Kaner R. B., Fleurial J. P. (2009). "Nanostructured Bulk Silicon as an Effective Thermoelectric Material". *Adv. Funct. Mater.* 19:2445-52.

[14] Joshi G., Lee H., Lan Y. C., Wang X. W., Zhu G. H., Wang D. Z., Gould R. W., Cuff D. C., Tang M. Y., Dresselhaus M. S., Chen G., Ren

Z. F. (2008). "Enhanced Thermoelectric Figure-of-Merit in Nanostructured p-type Silicon Germanium Bulk Alloys". *Nano Lett.* 8:4670-4.

[15] Wang X. W., Lee H., Lan Y. C., Zhu G. H., Joshi G., Wang D. Z., Yang J., Muto A. J., Tang M. Y., Klatsky J., Song S., Dresselhaus M. S., Chen G., Ren Z. F. (2008). "Enhanced thermoelectric figure of merit in nanostructured n-type silicon germanium bulk alloy". *Appl. Phys. Lett.* 93:193121.

[16] Zhu G. H., Lee H., Lan Y. C., Wang X. W., Joshi G., Wang D. Z., Yang J., Vashaee D., Guilbert H., Pillitteri A., Dresselhaus M. S., Chen G., Ren Z. F. (2009). "Increased Phonon Scattering by Nanograins and Point Defects in Nanostructured Silicon with a Low Concentration of Germanium". *Phys. Rev. Lett.* 102:196803.

[17] Zebarjadi M., Joshi G., Zhu G. H., Yu B., Minnich A., Lan Y. C., Wang X. W., Dresselhaus M., Ren Z. F., Chen G. (2011). "Power Factor Enhancement by Modulation Doping in Bulk Nanocomposites". *Nano Lett.* 11:2225-30.

[18] Yu B., Zebarjadi M., Wang H., Lukas K., Wang H. Z., Wang D. Z., Opeil C., Dresselhaus M., Chen G., Ren Z. F. (2012). "Enhancement of Thermoelectric Properties by Modulation-Doping in Silicon Germanium Alloy Nanocomposites". *Nano Lett.* 12:2077-82.

[19] Mingo N., Hauser D., Kobayashi N. P., Plissonnier M., Shakouri A. (2009). ""Nanoparticle-in-Alloy" Approach to Efficient Thermoelectrics: Silicides in SiGe". *Nano Lett.* 9:711-5.

[20] Favier K., Bernard-Granger G., Navone C., Soulier M., Boidot M., Leforestier J., Simon J., Tedenac J. C., Ravot D. (2014). "Influence of in situ formed MoSi2 inclusions on the thermoelectrical properties of an N-type silicon-germanium alloy". *Acta Mater.* 64:429-42.

[21] Bathula S., Jayasimhadri M., Singh N., Srivastava A. K., Pulikkotil J., Dhar A., Budhani R. C. (2012). "Enhanced thermoelectric figure-of-merit in spark plasma sintered nanostructured n-type SiGe alloys". *Appl. Phys. Lett.* 101:213902.

ออสโมซิสและอุณหพลศาสตร์

ปนัดดา เดชาดิลก[1]

ในปี ค.ศ. 1748 นักฟิสิกส์ชาวฝรั่งเศส Jean-Antoine Nollet ได้รายงานการมีอยู่ของกระบวนการออสโมซิสและตั้งแต่นั้นเป็นต้นมา กระบวนการนี้ก็ถูกนำมาอธิบายการเกิดปรากฏการณ์ทางชีววิทยาเป็นจำนวนมากที่เกี่ยวข้องการการขนส่งน้ำหรือของเหลว อาทิการขนส่งน้ำผ่านเมมเบรนของเซลล์ความสามารถในการดูดน้ำของรากต้นไม้ นอกจากนี้กระบวนการออสโมซิสยังเป็นหนึ่งในสาเหตุที่ทำให้ปลาน้ำจืดหลายชนิดไม่สามารถดำรงชีวิตอยู่ในน้ำเค็ม และปลาน้ำเค็มจำนวนไม่น้อยจะตายถ้าถูกนำมาปล่อยในน้ำจืด เป็นที่เชื่อกันว่าการไหลของของเหลวในกระบวนการออสโมซิสนั้นเกิดจากความเข้มข้นของสารละลายที่ไม่เท่ากัน คือจะเกิดการไหลของของเหลวจากด้านของสารละลายที่มีความเข้มข้นต่ำกว่าไปยังด้านของสารละลายที่มีความเข้มข้นสูงกว่า แต่ในความเป็นจริงเกรเดียนต์ของความเข้มข้นของสารละลายเพียงอย่างเดียวนั้นไม่เพียงพอที่จะทำให้เกิดการไหลของของเหลว และการไหลของของเหลวในกระบวนการออสโมซิสไม่จำเป็นจะต้องไหลจากด้านของสารละลายที่มีความเข้มข้นต่ำไปยังด้านของสารละลายที่มีความเข้มข้นสูงเสมอไป แต่อาจจะเกิดขึ้นได้แม้ในกรณีที่สารละลายทั้งสองด้านมีความเข้มข้นเท่ากัน เช่น ในระหว่างการฟอกไตผ่านผนังหน้าท้อง หนึ่งในสามทางรักษาของผู้ป่วยไตวายระยะสุดท้าย น้ำยาฟอกไตประมาณ 1-2 ลิตรจะถูกใส่ลงในช่องท้องของผู้ป่วย น้ำจะไหลออกจากกระแสโลหิตผ่านเยื่อบุผนังหน้าท้องออกสู่น้ำยาฟอกไตด้วยกระบวนการออสโมซิสแม้ว่าค่าความเข้มข้นของตัวถูกละลายภายในของเหลวทั้งสองชนิดคือเลือดในหลอดเลือดและน้ำยาฟอกไตนั้นมีค่าใกล้เคียงกันมาก อะไรทำให้เกิดการไหลของของเหลวปริมาณมหาศาลผ่านเยื่อบุผนังหน้าท้องด้วยกระบวนการออสโมซิสทั้ง ๆ ที่ความเข้มข้นของสารละลายทั้งสองด้านนั้นเกือบจะเท่ากัน คอลัมน์นี้ตั้งใจที่จะอธิบายปรากฏการณ์ดังกล่าวและระบุปัจจัยที่มีผลต่อกระบวนการออสโมซิสโดยใช้หลักการฟิสิกส์และอุณหพลศาสตร์อย่างง่าย ๆ

ออสโมซิสผ่านเมมเบรนที่โมเลกุลของตัวทำละลายผ่านเข้าสู่เมมเบรนได้แต่ตัวถูกละลายผ่านไม่ได้

เพื่ออธิบายการเกิดของกระบวนการออสโมซิสให้ชัดเจนยิ่งขึ้น ผู้อ่านลองนึกภาพเยื่อบาง ๆ ที่กั้นขวางระหว่างของเหลวซึ่งเป็นสารละลายสองชนิดดังในรูปที่ 1 สมมติให้เยื่อบาง ๆ นี้เต็มไปด้วยรูพรุนหรือเมมเบรนยอมให้มีการขนส่งตัวทำละลายผ่านเมมเบรน แต่ไม่ยอมให้ตัวถูกละลายนั้นเคลื่อนที่ผ่านเมมเบรนได้เลย สมการที่เป็นที่ยอมรับกันในการอธิบายการเกิดฟลักซ์ของของเหลวผ่านเมมเบรนคือสมการสตาร์ลิง (Starling's Equation)

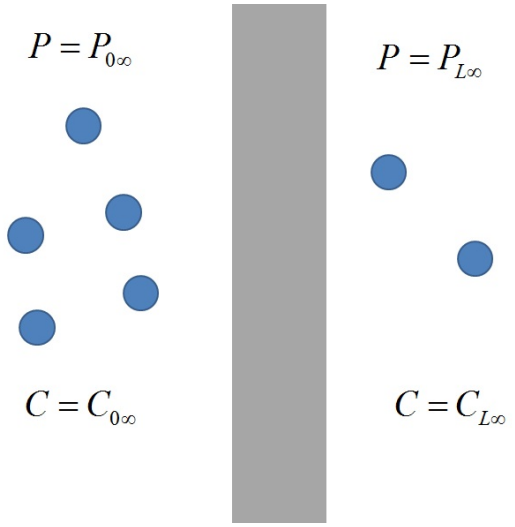
$$J_V = -L_p(\Delta P_\infty - \Delta\Pi_\infty) \qquad (1)$$

โดยที่ J_V คือฟลักซ์ของของเหลว ΔP_∞ คือความแตกต่างระหว่างความดันภายนอกของทั้งสองด้านของเมมเบรน "∞" แทนค่าของตัวแปรในสารละลายภายนอกเมมเบรน L_p คือ hydraulic coefficient หรือฟลักซ์ของของเหลวต่อหนึ่งหน่วยความดัน $\Delta\Pi_\infty$ ถูกเรียกว่าความดันออสโมซิส (osmotic pressure) ในทางอุณหพลศาสตร์ออสโมซิสนั้นเกิดจากความไม่เท่ากันของศักยภาพทางเคมี (chemical potential) ของตัวทำละลายที่อยู่ทั้งสองด้านของเมมเบรน เนื่องจากการมีอยู่ของตัวถูกละลายนั้นทำให้ตัวทำละลาย "เจือจาง"ลง ตัวทำละลายจึงจะไหลจากด้านที่มีศักยภาพทางเคมีสูงกว่า (ด้านที่มีความเข้มข้นของตัวถูกละลายต่ำกว่า หรือด้านซ้ายของเมมเบรนในรูปที่ 1) ไปยังด้านที่มีศักยภาพทางเคมีต่ำกว่า (ด้านที่มีความเข้มข้นของตัวถูกละลายสูงกว่าหรือด้านขวาของเมมเบรนในรูปที่ 1) ความดันออสโมซิสถูกนิยามให้มีค่าเท่ากับความดันที่สามารถทำให้ไม่เกิดการไหลแม้ว่าจะมีความแตกต่างของศักยภาพทางเคมี แม้ว่าจะถูกเรียกว่า "ความดัน" แต่ความดันออสโมซิสจริง ๆ แล้วคือศักยภาพทางเคมีส่วนที่ขึ้นอยู่กับความเข้มข้นของตัวถูกละลาย สำหรับสารละลายเจือจาง ค่าของความดันออสโมซิสสามารถคำนวณได้จากกฎของแวนต์ฮอฟ (van't Hoff's Law) ดังสมการที่ (2)

$$\Delta\Pi_\infty = kT\Delta C_\infty = kT\left(C_{0\infty} - C_{L\infty}\right) \qquad (2)$$

[1]อาจารย์ (ดร.) ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดยที่ $C_{0\infty}$ และ $C_{L\infty}$ คือความเข้มข้นของสารละลายภายนอกเมมเบรนที่ $z = 0$ และ $z = L$ k คือค่าคงที่โบลซท์มานน์ และ T คืออุณหภูมิในหน่วยเคลวิน



รูปที่ 1 แบบจำลองเมมเบรนที่กั้นขวางระหว่างสารละลายซึ่งมีความเข้มข้นไม่เท่ากัน

กฎของแวนต์ฮอฟสามารถพิสูจน์ได้จากหลักอุณพลศาสตร์ง่าย ๆ [1] สมมติให้เมมเบรนที่กั้นระหว่างสารละลายประกอบด้วยรูพรุนซึ่งมีลักษณะเป็นทรงกระบอกขนาดยาวดังในรูปที่ 2 และมีสมดุลทางอุณหพลศาสตร์ที่บริเวณช่วงต่อระหว่างเมมเบรนและสารละลายภายนอกทั้งที่ต้นทางและปลายทางของรูพรุน เงื่อนไขของสมดุลทางอุณหพลศาสตร์นี้คือ $P-\Pi$ นั้นจะต้องเป็นค่าคงที่ ณ ตำแหน่ง $z = 0$ และ $z = L$ หากเริ่มต้นพิจารณาที่ $z = 0$ เงื่อนไขดังกล่าวสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (3)

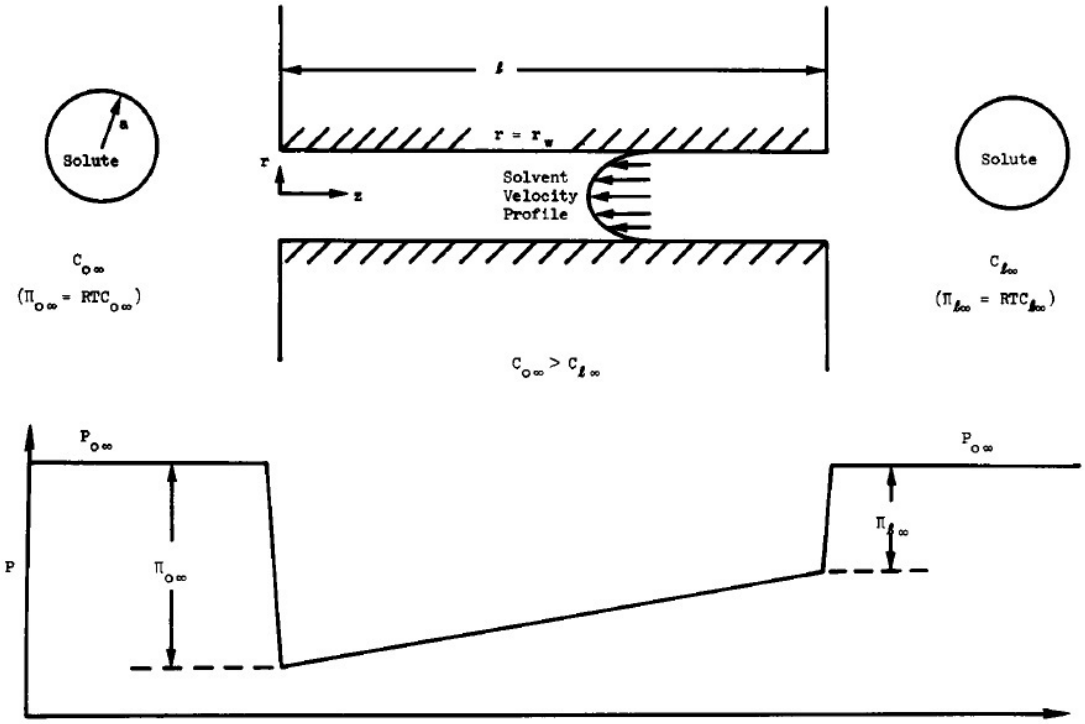
$$P_{0\infty} - kTC_{0\infty} = P_0 - kTC_0 \qquad (3)$$

โดยที่ $P_{0\infty}$ คือความดันภายนอกเมมเบรนที่ $z = 0$ ในขณะที่ P_0 และ C_0 คือความดันและความเข้มข้นของสารละลายภายในเมมเบรนที่ $z = 0$ ถ้าเมมเบรนยอมให้มีการขนส่งตัวทำละลายผ่านเมมเบรน แต่ไม่ยอมให้ตัวถูกละลายนั้นเคลื่อนที่ผ่านเมมเบรนได้ $C_0 = 0$ และความแตกต่างระหว่างความดันภายนอกและภายในที่ต้นทางของรูพรุนสามารถเขียนได้ดังนี้

$$P_{0\infty} - P_0 = -kTC_{0\infty} \qquad (4)$$

ความแตกต่างของความดันภายนอกและภายในเมมเบรนที่ปลายทางของรูพรุนหรือ $z = L$ สามารถพิจารณาได้ในลักษณะเดียวกัน และเขียนได้ดังสมการที่ (5)

$$P_{L\infty} - P_L = -kTC_{L\infty} \qquad (5)$$



รูปที่ 2 ภาพจำลองการไหลเนื่องจากกระบวนการออสโมซิสผ่านเมมเบรนและการเปลี่ยนแปลงของความดันเป็นฟังก์ชันของ z [2]

จากสมการที่ (4) และ (5) ในกรณีที่ไม่มีความแตกต่างของความดันภายนอกเมมเบรน $P_{0\infty} = P_{L\infty}$ ความแตกต่างระหว่างความดันต้นทางและปลายทางของเมมเบรนสามารถเขียนได้ดังนี้

$$P_0 - P_L = -kT\left[C_{L\infty} - C_{0\infty}\right] = \Delta\Pi_\infty \qquad (6)$$

จะเห็นได้จากสมการที่ (6) ว่าความแตกต่างของความเข้มข้นของสารละลายภายนอกเมมเบรนทำให้เกิดเกรเดียนต์ของความดันภายในเมมเบรนดังแสดงในรูปที่ 2 หากความเข้มข้นของสารละลายที่ $z = 0$ มีค่ามากกว่าความเข้มข้นของสารละลายที่ $z = L$ หรือ $C_{0\infty} > C_{L\infty}$ ความดันภายในเมมเบรนที่ $z = 0$ มีค่ามากกว่าความดันภายในเมมเบรนที่ $z = L$ $P_L > P_0$ ทำให้เกิดการไหลแบบปัวเซย์ไปในทิศทาง $-z$ ดังแสดงในรูปที่ 2

นิยามของสัมประสิทธิ์การสะท้อนออสโมซิส

กฎของแวนต์ฮอฟดังแสดงในสมการที่ 2 ดูจะบอกกับเราว่าออสโมซิสเกิดจากความแตกต่างของความเข้มข้นของสารละลายภายนอกเมมเบรน แล้วออสโมซิสในกรณีที่ความเข้มข้นของสารละลายภายนอกเมมเบรนทั้งสองด้านเท่ากันนั้นเกิดขึ้นได้อย่างไร ลองพิจารณาเมมเบรนที่เต็มไปด้วยรูพรุนและยอมให้ตัวถูกละลายบางส่วนผ่านเข้าสู่เมมเบรน กล่าวคือ C_0 และ C_L ไม่เท่ากับศูนย์ สมการที่ 4 และ 5 สามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$P_{0\infty} - P_0 = -kT\left[C_{0\infty} - C_0\right] \qquad (7a)$$

$$P_{L\infty} - P_L = -kT\left[C_{L\infty} - C_L\right] \qquad (7b)$$

หรืออีกนัยหนึ่งความแตกต่างของความดันภายในเมมเบรนนั้นสามารถเขียนได้ดังสมการด้านล่าง

$$P_L - P_0 = kT\left[\left(C_{0\infty} - C_0\right) - \left(C_{L\infty} - C_L\right)\right] < kT\left[C_{0\infty} - C_{L\infty}\right] \qquad (8)$$

อีกนัยหนึ่ง เกรเดียนต์ของความดันภายในเมมเบรนสำหรับเมมเบรนที่ยอมให้ตัวถูกละลายบางส่วนผ่านเข้าสู่เมมเบรนจะมีค่าน้อยกว่าเกรเดียนต์ของความดันภายในเมมเบรนในกรณีที่เมมเบรนยอมให้ตัวทำละลายผ่านเข้าสู่เมมเบรนเพียงอย่างเดียว หากขนาดของตัวถูกละลายมีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับขนาดของรูพรุนของเมมเบรนจนกระทั่งความเข้มข้นของสารละลายภายในเมมเบรนมีค่าเท่ากับความเข้มข้นของสาระลายภายนอกเมมเบรนที่ $z = 0$ และ $z = L$ กล่าวคือ $C_{0\infty} = C_0$ และ $C_{L\infty} = C_L$ จะไม่มีการไหลเนื่องจากกระบวนการออสโมซิสเกิดขึ้นแม้ว่า $C_{0\infty}$ และ $C_{L\infty}$ จะมีค่าไม่เท่ากัน

เนื่องจากเหตุผลข้างต้น ฟลักซ์ของของเหลวและสมการสตาร์ลิงที่ถูกระบุไว้ในสมการที่ 1 จึงสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$J_V = -L_p(\Delta P_\infty - \sigma_0 \Delta\Pi_\infty) \qquad (9)$$

โดยที่ σ_0 คือสัมประสิทธิ์การสะท้อนออสโมซิส (osmotic reflection coefficient) คืออัตราส่วนระหว่างความดันและความดันออสโมซิสที่ทำให้ฟลักซ์ของของเหลวเท่ากับศูนย์

$$\sigma_0 = \left.\frac{\Delta P_\infty}{\Delta\Pi_\infty}\right|_{J_V=0} \qquad (10)$$

ในกรณีที่เมมเบรนไม่ยอมให้ตัวถูกละลายผ่านเข้าสู่เมมเบรนเลย (non-permeable membrane) $\sigma_0 = 1$ สำหรับเมมเบรนที่ยอมให้ตัวถูกละลายทั้งหมดผ่านเข้าสู่เมมเบรน $\sigma_0 = 0$ และในกรณีที่เมมเบรนยอมให้ตัวถูกละลายบางส่วนผ่านเข้าสู่เมมเบรน $0 < \sigma_0 < 1$

จากสมการที่ 10 จะเห็นได้ว่าการไหลในกระบวนการออสโมซิสไม่ได้ขึ้นอยู่กับความแตกต่างของความเข้มข้นของสารละลายทั้งสองด้านของเมมเบรนเพียงประการเดียว หากแต่ขึ้นอยู่กับปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวถูกละลายและเมมเบรนด้วย ปัจจัยที่ส่งผลต่อปฏิสัมพันธ์ของตัวถูกละลายและเมมเบรน เช่นขนาดประจุ หรือรูปร่างของตัวถูกละลายและรูพรุนจะส่งผลต่อการไหลของของเหลวในกระบวนการออสโมซิสเช่นกัน กระบวนการออสโมซิสนั้นเกิดขึ้นได้แม้ในกรณีที่ความเข้มข้นของสารละลายทั้งสองด้านของเมมเบรนมีค่าเท่ากันหรือความแตกต่างของความดันออสโมซิสมีค่าเท่ากันศูนย์ ถ้าผลคูณระหว่างสัมประสิทธิ์การสะท้อนออสโมติกและความดันออสโมซิสของทั้งสองด้านนั้นไม่เท่ากันดังเช่นที่ปรากฏในกรณีของการฟอกไตผ่านผนังช่องท้อง

ผลการคำนวณสัมประสิทธิ์การสะท้อนออสโมติกสำหรับตัวถูกละลายเป็นกลางทางไฟฟ้า

ในช่วงหลายทศวรรษที่ผ่านมา ได้มีความพยายามในการคำนวณหาค่าของสัมประสิทธิ์การสะท้อนออสโมติกเป็นฟังก์ชัน

สมบัติพื้นฐานของตัวถูกละลายและรูพรุน วิธีที่ใช้กันอย่างแพร่หลายคือวิธีที่เรียกกันว่า center locator ซึ่งถูกนำเสนอโดย Malone และ Anderson ในปี 1974 [2] โดยที่คำนึงถึงความไม่สม่ำเสมอของความเข้มข้นของสารละลายบนพื้นที่หน้าตัดของรูพรุนทรงกระบอก หากความยาวของรูพรุนนั้นมีค่ามากกว่ารัศมีของพื้นที่หน้าตัดของรูพรุนนั้นมาก ๆ ความเข้นข้นของสารละลายสามารถระบุได้ดังสมการด้านล่าง

$$C(r,z) = f(z)\exp(-E(r)/kT) \qquad (11)$$

โดยที่ $E(r)$ คือพลังงานศักย์ในการนำตัวถูกละลายไปไว้ ณ ตำแหน่ง r บนพื้นที่หน้าตัดของรูพรุนทรงกระบอก สำหรับตัวถูกละลายทรงกลมแข็งเกร็งเป็นกลางทางไฟฟ้าซึ่งปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวถูกละลายและผนังรูพรุนคือปฏิสัมพันธ์สเตอร์ริก (steric interaction) พลังงานศักย์ดังกล่าวคือ

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r \le R-a \\ \infty & r > R-a \end{cases} \qquad (12)$$

โดยที่ a คือรัศมีของตัวถูกละลายทรงกลมและ R คือรัศมีของพื้นที่หน้าตัดของรูพรุน เหตุที่เป็นเช่นนั้นเนื่องจากระยะห่างน้อยที่สุดที่เป็นไปได้ระหว่างศูนย์กลางของตัวถูกละลายและผนังรูพรุนคือ a ตัวถูกละลายทรงกลมไม่สามารถเข้าใกล้ผนังของรูพรุนได้มากกว่านั้น อัตราส่วนระหว่างความเข้มข้นเฉลี่ยภายในเมมเบรน $<C>$ ต่อความเข้มข้นภายนอกเมมเบรนที่ $z = 0$ และ $z = L$ สามารถเขียนได้ดังนี้

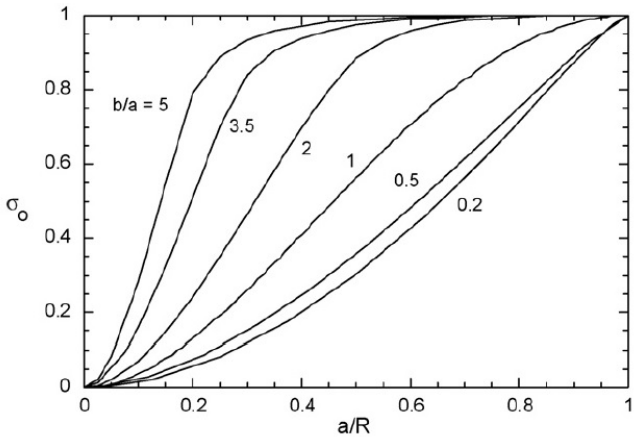
$$\frac{<C(z=0)>}{C_{0\infty}} = \frac{<C(z=L)>}{C_{L\infty}} = \left(1-\frac{a}{R}\right)^2 \qquad (13)$$

สัมประสิทธิ์การสะท้อนกลับออสโมซิสสามารถคำนวณได้จากสมการ (14)

$$\sigma_0 = \left[1-\frac{<C(z=0)>}{C_{0\infty}}\right]^2 = \left(1-\left(1-\frac{a}{R}\right)^2\right)^2 \qquad (14)$$

โดยผลการคำนวณนี้ถูกแสดงในรูปที่ 3 เป็นฟังก์ชันของ a/R (ในกรณีที่ $b/a = 1$) จะเห็นได้ว่ายิ่ง (a/R) มีค่ามากขึ้น ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนออสโมซิสก็จะยิ่งเพิ่มขึ้นแสดงให้เห็นว่าฟลักซ์ของของเหลวในกระบวนการออสโมซิสก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย

Bhalla และ Deen [3] ได้คำนวณค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนกลับออสโมซิสเพิ่มเติมสำหรับตัวถูกละลายที่มีรูปร่างเป็นทรงคล้ายทรงกลมแบนข้าง (prolate spheroid) และทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว (oblate spheroid) โดยที่ a ถูกนิยามให้เป็นครึ่งหนึ่งของความยาวของแกนเอกและ b ถูกนิยามให้เป็นครึ่งหนึ่งของความยาวของแกนโทดังแสดงในรูปที่ 4 โดยที่ (b/a) จะมีค่ามากกว่า 1 สำหรับทรงคล้ายทรงกลมแบนข้าง และมีค่าน้อยกว่า 1 สำหรับทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว ผลการคำนวณเป็นฟังก์ชันของ a/R ในรูปที่ 5 จะเห็นได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนออสโมซิสสำหรับทรงคล้ายทรงกลมแบนข้างจะมีค่าสูงกว่าค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนออสโมซิสของทรงกลม ($b/a = 1$) ซึ่งจะมีค่าสูงกว่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนออสโมซิสของทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้วที่ค่า a/R เดียวกัน



รูปที่ 3 สัมประสิทธิ์การสะท้อนออสโมซิสของทรงกลมและทรงคล้ายทรงกลมเป็นฟังก์ชันของ a/R

a = ครึ่งหนึ่งของความยาวของแกนเอก

b = ครึ่งหนึ่งของความยาวของแกนโท

b/a > 1 สำหรับทรงคล้ายทรงกลมแบนข้าง

b/a = 1 สำหรับทรงกลม และ

b/a < 1 สำหรับทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว [3]

สรุป

การไหลของของเหลวภายในกระบวนการออสโมซิสนั้นไม่ได้ขึ้นอยู่กับเกรเดียนต์ของความเข้มข้นของสารละลายแต่ประการเดียว หากแต่ยังขึ้นอยู่กับปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวถูกละลายและรูพรุนภายในเมมเบรนอีกด้วย สมบัติพื้นฐานของตัวถูกละลาย

อ่านต่อหน้า 21

อนุภาคนาโนแม่เหล็กกับแก้วชีวภาพแบบรูพรุน: ทางเลือกการรักษาโรคมะเร็งกระดูกแบบมัลติฟังก์ชัน

ธนิดา เจริญสุข[1] และ อัปสร บุญยัง[1]

"แก้วชีวภาพ (Bioactive glass)" เป็นเซรามิกส์ชีวภาพชนิดหนึ่งที่กำลังได้รับความสนใจอย่างมากในปัจจุบันสำหรับการเป็นวัสดุปลูกถ่ายทดแทนกระดูกสังเคราะห์ (Synthetic bone graft material) ด้วยคุณสมบัติโดดเด่นที่สามารถใช้ปลูกฝังในร่างกายเพื่อใช้ในการแทนที่ (Replace) และกระตุ้นการงอกใหม่ (Regenerate) ในส่วนที่บกพร่องหรือเสียหายของกระดูก แล้วยังสามารถถูกดูดซึมกลับพร้อมสลายบางส่วนไปได้ (Resorbable) ในขณะที่มีเนื้อเยื่อกระดูกเจริญเติบโตขึ้นมาแทน ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่สำคัญอย่างมากสำหรับวงการวิศวกรรมเนื้อเยื่อ (Tissue engineering technology) ค้นพบครั้งแรกโดย ศาสตราจารย์ Larry Hench แห่ง University of Florida ซึ่งได้สร้างแก้วซึ่งมีองค์ประกอบของ $46.1SiO_2$-$26.9CaO$-$24.4Na_2O$-$2.6P_2O_5$ (%mole) ที่สามารถสลายตัวได้ในร่างกายมนุษย์ พร้อมกับก่อเกิดชั้นไฮดรอกซีแอปาไทต์ (Hydroxyapatite layer) ซึ่งเป็นองค์ประกอบของแร่ธาตุกระดูกขึ้นมาที่ผิวหน้าสัมผัส จึงมีการตอบสนองทางชีวภาพ (Bioactivity) สามารถเกิดพันธะยึดติดกับกระดูกได้อย่างแข็งแรงมาก [1] จากความสำเร็จทั้งการทดสอบจำลองเสมือนจริงในหลอดทดลอง (*in vitro* testing) และการทดสอบในร่างกายสิ่งมีชีวิต (*in vivo* testing) แก้วชีวภาพองค์ประกอบแรกนี้จึงถูกผลิตใช้ในวงการแพทย์ศัลยกรรมกระดูกและ ทันตกรรมเป็นครั้งแรกในปี 1993 ด้วยชื่อทางการค้าว่า 45S5 Bioglass® และจนถึงปัจจุบันนี้ก็ยังคงได้รับการยอมรับว่าเป็นองค์ประกอบที่มีคุณสมบัติทางชีวภาพดีที่สุด [2] โดยปัจจุบันมีชื่อเรียกทางการค้าว่า Novabone นิยมใช้ในรูปผงอนุภาค (Powder) นำมาเติมเต็มลงในชิ้นส่วนบกพร่องของกระดูก (Bone defect) หรือถูกนำมาผสมกับน้ำเลือดของผู้ป่วย (Patient's blood) และปั้นเป็นลักษณะคล้ายปูนอุด (Putty) ก่อนการใช้งาน

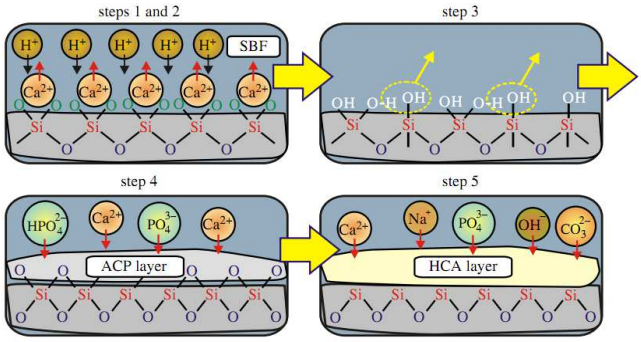
รูปที่ 1 ตัวอย่างการใช้งานแก้วชีวภาพ Novabone [2]

ตารางที่ 1 องค์ประกอบของแก้วชีวภาพบางชนิดที่ใช้อยู่ในทางการแพทย์และทันตกรรม [3]

Composition (wt%)	45S5 Bioglass (NovaBone)	S53P4 (AbminDent1)	A-W Glass-ceramic (Cerabone)
Na_2O	24.5	23	0
CaO	24.5	20	44.7
CaF_2	0	0	0.5
MgO	0	0	4.6
P_2O_5	6	4	16.2
SiO_2	45	53	34
Phases	Glass	Glass	Apatite beta-wollastonite Glass
Class of bioactivity	A	B	B

แก้วชีวภาพเหล่านี้ที่มีใช้กันอยู่เป็นแก้วที่ผลิตมาจากวิธีการหลอมแล้วทำให้เย็นตัวลงอย่างรวดเร็ว (Melt-quenching method) โดยสารตั้งต้นจะถูกผสมเข้าด้วยกันในองค์ประกอบที่ต้องการแล้วนำไปหลอมที่อุณหภูมิประมาณ 1,300-1,400 °C แล้วทำให้เย็นตัวลงในโมลด์ (Mold) หรือในน้ำ เพื่อผลิตแก้วชีวภาพแบบเป็นแท่ง (Rod) ก้อน (Monolith) แกรนูล (Granule) หรือผงอนุภาค (Powder) ตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการนำไปใช้งาน

[1]สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์



รูปที่ 2 กระบวนการสลายตัวของซิลิกาและการชักนำการก่อเกิดของเฟตแร่ธาตุกระดูก Hydroxyl carbonate apatite (HCA) ของแก้วชีวภาพในสภาวะร่างกาย [4]

Ion exchange reaction:

$$Si-O-Ca^{2+} + H_2O \rightarrow Si-OH^{+} + Ca^{2+} + OH^{-}$$

Breaking of siloxane:

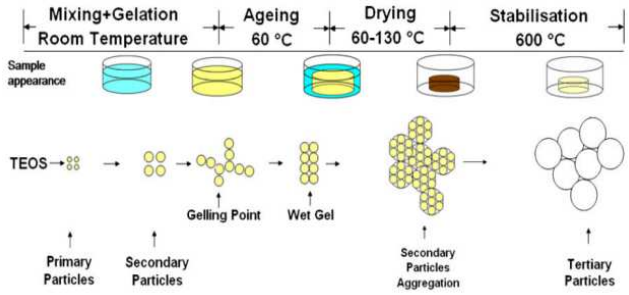
$$Si-O-Si + H_2O \rightarrow Si-OH + OH-Si$$

Condensation and repolymerisation of silica-rich layer:

$$HO-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{\overset{OH}{|}}{Si}}-OH + HO-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{\overset{OH}{|}}{Si}}-OH \rightarrow HO-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{\overset{OH}{|}}{Si}}-O-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{\overset{OH}{|}}{Si}}-OH + H_2O$$

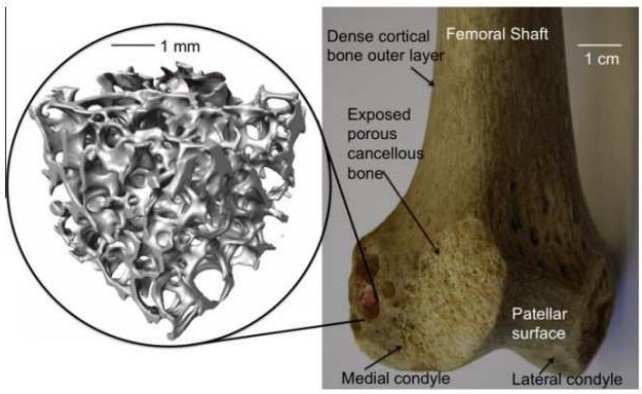
เมื่อแก้วชีวภาพอยู่ในสภาวะสัมผัสกับของเหลวในร่างกาย จะเกิดปฏิกิริยาแลกเปลี่ยนประจุ (Ion exchange reaction) แคลเซียมไอออน (Ca^{2+}) และโซเดียมไอออน (Na^{+}) ถูกละลายออกและถูกแทนที่ด้วยไฮโดรเจนไอออน (H^{+}) จากของเหลว และเนื่องจากการเพิ่มขึ้นของค่า pH ตามการเพิ่มปริมาณของไฮดรอกไซด์ไอออน (OH^{-}) พันธะ Si-O-Si (Siloxane) ของแก้วเกิดการแตกพันธะ ซิลิกาบางส่วนถูกละลายออก เกิดพันธะ Si-OH (Silanol) และเมื่อซิลิกาละลายออกมามากขึ้นจนเกิดการควบแน่น (Condensation) และการรีพอลิเมอไรเซชัน (Repolymerisation) จะเกิดเป็น Silica-rich layer ขึ้นที่บริเวณผิวแก้ว ซึ่งจะพัฒนาเป็น Amorphous calcium phosphate (ACP) layer โดยการรวมตัวกับ Ca^{2+}และฟอสเฟตไอออน (PO_4^{3-}) ทั้งจากภายในเนื้อแก้วและจากของเหลว และต่อมาเมื่อรวมตัวกับ OH^{-} และคาร์บอเนตไอออน (CO_3^{2-}) ที่มีอยู่ในของเหลว มันจะเกิดเป็น Hydroxyl carbonate apatite (HCA) ซึ่งเป็นเฟสของแร่ธาตุกระดูก และชักนำการก่อเกิดเนื้อเยื่อใหม่ของกระดูกขึ้นมาได้ แต่เมื่อใดที่ชั้นไฮดรอกซีแอปาไทต์งอกขึ้นจนเต็มพื้นที่ผิวสัมผัส การสลายตัวของแก้วชีวภาพก็จะยุติลง ดังนั้นด้วยลักษณะของแก้วชีวภาพแบบเนื้อแน่น (Dense) จึงเป็นข้อจำกัดของปริมาณการสลายไปของแก้วและการงอกใหม่ของเฟสแร่ธาตุกระดูกอย่างไฮดรอกซีแอปาไทต์ อีกทั้งยังมีข้อจำกัดของวัสดุเซรามิกส์ทั่วไปในด้านสมบัติเชิงกล คือ มีความเปราะบาง (Brittleness) มีค่าความทนทานต่อการกด (Compressive strength) และค่าความทนทานต่อการแตกหัก (Fracture toughness) ต่ำกว่ากระดูกธรรมชาติอย่างมาก จึงเหมาะเฉพาะสำหรับใช้เติมเต็มในบริเวณกระดูกบกพร่องขนาดเล็กๆ ที่ไม่ต้องแบกรับน้ำหนักและทันตกรรม เพื่อซ่อมแซมหรือชักนำให้เกิดการงอกใหม่ของกระดูก หรือใช้ในการเคลือบผิว (Coating) วัสดุทดแทนกระดูกสังเคราะห์ชนิดเฉื่อยทางชีวภาพ (Bioinert bone implant material) เพื่อให้การยึดติดระหว่างเนื้อเยื่อของร่างกายกับวัสดุเกิดขึ้น และนอกเหนือจากข้อจำกัดในการใช้งานดังกล่าว แก้วชีวภาพที่ผลิตจากกระบวนการหลอมนี้มียังข้อจำกัดในกระบวนการผลิตด้วย มีผลการวิจัยพบว่าการมีอยู่ของฟอสเฟต (P_2O_5) ในองค์ประกอบของแก้วชีวภาพนั้นเพียงเพื่อช่วยเร่งการก่อเกิดเฟสแคลเซียมฟอสเฟต (Calcium phosphate phase) ซึ่งเป็นขั้นตอนหนึ่งในการพัฒนาต่อไปเป็นชั้นไฮดรอกซีแอปาไทต์ซึ่งเกิดขึ้นที่ผิวหน้าสัมผัสระหว่างแก้วชีวภาพและของเหลวภายในร่างกาย (Physiological fluid) หรือของเหลวเสมือนน้ำเลือด (Simulated body fluid) เท่านั้น ไม่ได้เป็นองค์ประกอบที่ขาดไม่ได้แต่อย่างใด เนื่องจากขณะเกิดปฏิกิริยาผิวแก้วสามารถทำการดูดซับ PO_4^{3-} จากของเหลวในร่างกายนำมาใช้ได้ [5] แต่ในทางกลับกันหากมี P_2O_5 สูงเกินกว่า 10 %mole แก้วองค์ประกอบนี้ก็จะสูญเสียสมบัติทางชีวภาพไป [6-7] คุณสมบัติทางชีวภาพที่ดีของแก้วจะยังคงอยู่ได้ก็ต่อเมื่อมีปริมาณ SiO_2 ไม่เกินกว่า 60 %mole [1,8-9] หรือหากต้องการนำมาสร้างรูปแบบของโครงร่างเลี้ยงเซลล์ (Scaffold) การให้ความร้อน (Heat treatment) เพียง 550–680 °C จะก่อให้เกิดการตกผลึก มีการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างจากแก้วไปเป็นแก้ว-เซรามิกส์ ซึ่งส่งผลให้ความสามารถทางชีวภาพในการก่อเกิดเฟสไฮดรอกซีแอปาไทต์ลดลง [10-12] ด้วยข้อจำกัดต่างๆ ดังกล่าวมา จึงมีนักวิจัยกลุ่มหนึ่งหันมาให้ความสนใจกับแก้วพื้นฐานฟอสเฟต (Phosphate-based glasses) ซึ่งมีความคล้ายคลึงกับองค์ประกอบอนินทรีย์ของกระดูก แทนแก้วพื้นฐานซิลิกา (Silica-based glasses) วัสดุใช้ทดแทนและเสริมสร้างการงอกใหม่ของกระดูกอย่างเซรามิกส์ชีวภาพ เช่น แคลเซียมฟอสเฟต และไฮดรอกซีแอปาไทต์ จึงถูกพัฒนาขึ้นมาใช้

ในทางการแพทย์ [13] แต่อย่างไรก็ตามแก้วชีวภาพซึ่งผลิตจากกระบวนการหลอมก็ยังคงคุณสมบัติทางชีวภาพที่ดีกว่าและสามารถย่อยสลายได้เร็วกว่าวัสดุเซรามิกส์ชีวภาพดังกล่าว [13-14] นักวิจัยส่วนหนึ่งจึงให้ความสนใจอย่างมากในการปรับปรุงและพัฒนาคุณสมบัติของแก้วชีวภาพด้วยวิธีโซล-เจล (Sol-gel method) ซึ่งเป็นกระบวนการสังเคราะห์ทางเคมี โดยการกวนผสมสารตั้งต้น ได้แก่ ซิลิกอนไดออกไซด์ (SiO_2) เป็นองค์ประกอบหลักของแก้ว (Glass former)และสารประกอบออกไซด์ต่างๆ (Glass modifier) ที่ช่วยการออกฤทธิ์ทางชีวภาพ เช่น แคลเซียมออกไซด์ (CaO) และฟอสฟอรัสเพนตะออกไซด์ (P_2O_5) เข้าด้วยกันที่อุณหภูมิห้อง จนเกิดเป็น **“โซล”** ซึ่งมีอนุภาคของแข็งแขวนลอยกระจายอยู่ในสารละลายอย่างสม่ำเสมอ เนื่องจากปฏิกิริยาไฮโดรลิซิส (Hydrolysis) จากนั้นด้วยปฏิกิริยาควบแน่นแบบต่อเนื่อง (Polycondensation) ก็จะเกิดเป็น **“เจล”** ซึ่งก็คือโครงข่ายอนินทรีย์เปียกของ ซิลิกาที่ก่อพันธะโคเวเลนต์กันขึ้น เมื่อเจลถูกนำมาผ่านกระบวนการทำแห้ง (Drying) และให้ความร้อน (Calcine) ที่อุณหภูมิประมาณ 600 °C ก็จะกลายเป็นแก้วชีวภาพในที่สุด



รูปที่ 3 การสังเคราะห์แก้วชีวภาพด้วยวิธีโซล-เจล [15]

แก้วชีวภาพเหล่านี้จะมีคุณสมบัติความเป็นรูพรุนระดับมีโซ (2-50 nm) เป็นคุณสมบัติติดตัวที่เกิดขึ้นจากการระเหยออกของน้ำและแอลกอฮอล์ซึ่งเป็นผลผลิตพลอยได้ (By-products) ในขั้นตอนการทำแห้ง ส่งผลให้มีพื้นที่ผิวจำเพาะมากขึ้นถึง 10^2 เท่า เมื่อเปรียบเทียบกับแก้วองค์ประกอบเดียวกันที่ได้จากวิธีการหลอม [16-17] และมีผลต่อการเพิ่มคุณสมบัติทางชีวภาพและการเจริญเติบโตของเซลล์เนื้อเยื่อกระดูก ซึ่งมีผลการวิจัยพบว่า แก้วชีวภาพพื้นฐานซิลิกาที่ผลิตโดยวิธีโซล-เจลนั้น สามารถยังคงคุณสมบัติทางชีวภาพได้แม้ปริมาณ SiO_2 สูงถึง 90 %mole เป็นผลเนื่องจากการเพิ่มขึ้นอย่างมากของพื้นที่ผิวหน้าสัมผัสของแก้วที่มีลักษณะความเป็นรูพรุนระดับมีโซนี้ [13,16-18] ดังนั้นจึงมีการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการใช้ประโยชน์ของรูพรุนระดับมีโซ ต่อมา มีการเติม Structure-directing reagent เพื่อสร้างแก้วชีวภาพที่มีรูพรุนระดับมีโซซึ่งจัดเรียงตัวอย่างเป็นระเบียบ (Highly ordered mesoporous bioactive glass) สำหรับการประยุกต์ใช้สำหรับการนำส่งยาแบบเฉพาะจุด (Local drug delivery) ร่วมกับเสริมสร้างการงอกใหม่ของกระดูก [13] และเพื่อพัฒนาโครงสร้างของแก้วชีวภาพให้มีลักษณะใกล้เคียงกับโครงสร้างของกระดูกจริงให้มากยิ่งขึ้น มันจึงถูกพัฒนาต่อมาให้มีลักษณะโครงร่าง 3 มิติ (3-dimensional scaffold) และมีความเป็นรูพรุนทั้งในระดับมีโซและมาโคร (>50 nm) เพื่อส่งเสริมการเจริญเติบโตของเซลล์เนื้อเยื่อกระดูกให้เพิ่มมากขึ้น และมีการเติม (Dope) สารประกอบออกไซด์ของธาตุอื่นๆ เช่น แมกนีเซียม (Mg) โพแทสเซียม (K) เหล็ก (Fe) หรือเงิน (Ag) ลงไปร่วมด้วยเพื่อเพิ่มฟังก์ชันในการนำไปใช้ประโยชน์ทางการรักษา รวมทั้งมีการพัฒนาคุณสมบัติทางกลให้มีความเหนียวและแข็งแรงมากขึ้นด้วยการสร้างเป็นแก้วชีวภาพลูกผสม (Hybrid) ระหว่างสารอนินทรีย์และสารอินทรีย์ [2] เป็นต้น



รูปที่ 4 ลักษณะโครงสร้างรูพรุนของกระดูกโปร่งบริเวณต้นขาของมนุษย์ [2]

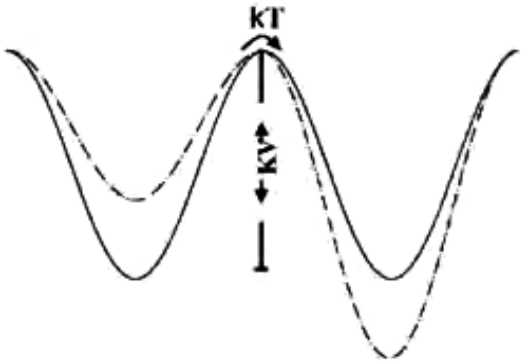
รูปที่ 5 ภาพถ่าย X-ray microtomography แสดงลักษณะโครงสร้างแก้วชีวภาพรูพรุนโครงร่างสามมิติที่ขึ้นรูปด้วยโฟม (Bioactive glass foam scaffold) [19]

จากข้อมูลดังกล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่าการสังเคราะห์แก้วชีวภาพด้วยวิธีโซล-เจล นั้นมีความสามารถโดดเด่นในการพัฒนาคุณสมบัติต่างๆ ให้เหมาะสมกับลักษณะโครงสร้างเฉพาะและตอบสนองความต้องการใช้งานเป็นวัสดุปลูกถ่าย ซ่อมแซม และเหนี่ยวนำให้เกิดการสร้างกระดูกขึ้นมาใหม่ นอกจากนั้นยังสามารถพัฒนาให้มีคุณสมบัติใช้งานเฉพาะในการรักษาโรคกระดูกต่างๆ ได้อย่างหลากหลาย เนื่องจากเป็นกระบวนการสังเคราะห์ทางเคมีที่อุณหภูมิห้อง จึงเป็นกรรมวิธีที่ง่ายและสะดวกกว่าวิธีการหลอมที่มีข้อจำกัดมากกว่าและต้องใช้อุณหภูมิที่สูงกว่าอย่างมาก แต่อย่างไรก็ตาม การใช้วิธีโซล-เจลสังเคราะห์แก้วชีวภาพที่มีคุณสมบัติดังกล่าวมาทั้งหมดนี้ ปัจจุบันยังคงอยู่ในระหว่างขั้นตอนของการวิจัยและพัฒนาก่อนการนำออกมาใช้จริงทางการแพทย์

“ซูเปอร์พาราแมกเนติก (Superparamagnetism)” เป็นสมบัติของอนุภาคนาโนเหล็กออกไซด์ เช่น แมกนีไทต์ (Fe_3O_4) หรือแมกฮีไมต์ (γ-Fe_2O_3) ที่กำลังได้รับความสนใจอย่างมากในการนำมาใช้ประโยชน์ทางการแพทย์ สำหรับการบำบัดรักษาโรคมะเร็งด้วยความร้อน (Hyperthermia therapy) และการนำส่งยา (Drug delivery) ด้วยขนาดที่เล็กมากกว่า 100 nm ทำให้มันเป็นเสมือนอนุภาคแม่เหล็กโดเมนเดี่ยว (Single magnetic domain) ที่มีการจัดเรียงตัวของโมเมนต์แม่เหล็กในทิศทางเดียวกันหมด ในแกนที่ เรียกว่า **Easy axis** การกลับทิศทาง (Flip direction) ของแมกนีไตเซชันเกิดได้แบบสุ่มเป็นผลจากพลังงานความร้อน (Thermal energy) และเกี่ยวข้องกับค่ากำแพงพลังงานซึ่งมีสองค่าต่ำสุด (Two minima energy barrier) อยู่ในทิศทางของ Easy axis ดังสมการ [20-21]

$$\Delta E = KV$$

โดย K คือค่า magnetic anisotropy (J/m^3) และ V คือปริมาตร (m^3) ของอนุภาคนาโน ในขณะไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอกมากระทำ และมีเพียงหนึ่งค่ากำแพงพลังงานต่ำสุด (One minimum energy barrier) ภายใต้อิทธิพลของสนามแม่เหล็กภายนอก และส่งผลต่อการวางตัวของแมกนีไตเซชันในทิศทางขนานกับสนาม



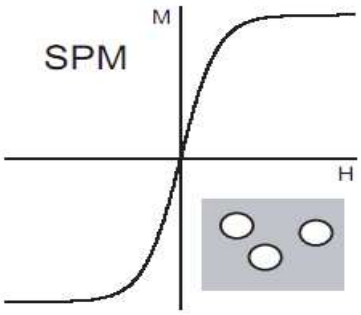
รูปที่ 6 สถานะกำแพงพลังงานต่ำสุดของอนุภาคนาโน uniaxial anisotropy ในขณะไม่มี (เส้นทึบ) และมี (เส้นประ) สนามแม่เหล็กภายนอกมากระทำ [20]

ค่าเฉลี่ยเวลาของการกลับทิศทางถูกเรียกว่า Relaxation time (τ) เป็นดังสมการ [20-21]

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right)$$

เมื่อ τ_0 คือ เวลา ที่เป็นคุณสมบัติเฉพาะของวัสดุ($\sim 10^{-9} - 10^{-10}$ s) , ΔE คือค่ากำแพงพลังงาน (J), k_B คือค่าคงที่โบลทซ์มันน์ (Boltzmann constant) มีค่าเท่ากับ 1.3806×10^{-23} J/K และ T คือค่าอุณหภูมิสัมบูรณ์ (K)

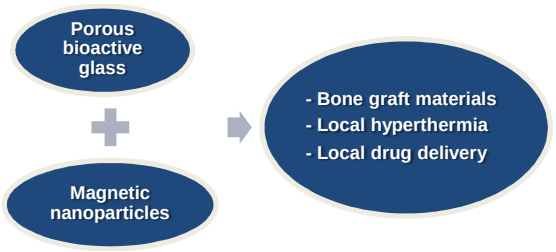
จากการมีทิศทางสุ่มแบบ Uniaxial anisotropy ของแมกนีไตเซชันทำให้โมเมนต์แม่เหล็กสุทธิ (Net magnetic moment) ของอนุภาคนาโนเหล่านี้เป็นศูนย์ เมื่อปราศจากสนามแม่เหล็กภายนอก มีคุณสมบัติซึ่งเป็นดังวัสดุแม่เหล็กพารา (Paramagnetic material) แต่เมื่อใดที่มีสนามภายนอกมากระทำ การจัดเรียงของแมกนีไตเซชันจะถูกเหนี่ยวนำจนมีทิศทางเดียวกับสนามภายนอกนี้ทั้งหมด (Saturated magnetization) ด้วยค่าของสภาพรับไว้ได้เชิงแม่เหล็ก (Magnetic susceptibility) ที่สูงกว่าวัสดุแม่เหล็กพารา จึงเป็นที่มาของการเรียกคุณสมบัติแม่เหล็กของอนุภาคนาโนเหล่านี้ว่า **ซูเปอร์พาราแมกนีติก**



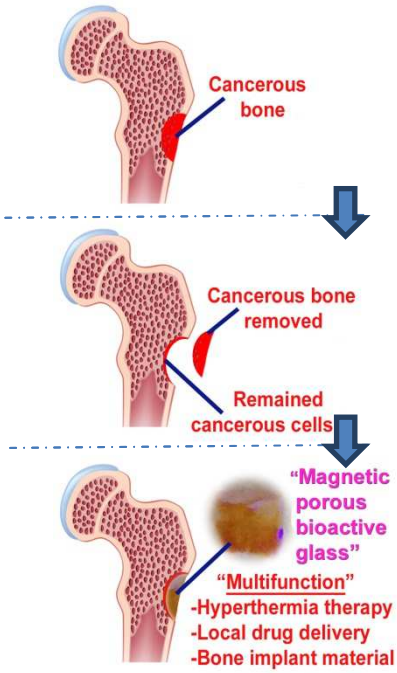
รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างความแรงสนามแม่เหล็กภายนอก (H) และแมกนีไตเซชัน (M) แสดงพฤติกรรมความเป็นแม่เหล็กซูเปอร์พารา [22]

ภายใต้การให้สนามแม่เหล็กสลับ (Alternating magnetic field) แก่อนุภาคนาโนเหล็กออกไซด์ ความสัมพันธ์ M-H แสดงลักษณะเฉพาะของ Sigmoidal shape (S-shape) เช่นเดียวกับวัสดุแม่เหล็กเฟร์โร (Ferromagnetic material) แตกต่างเพียงไม่เกิด Hysteresis loop เนื่องจากไม่มีสภาพแม่เหล็กคงค้าง (Residual magnetization) เมื่อปราศจากการให้สนามแม่เหล็กภายนอก ความร้อนถูกสร้างขึ้น เมื่อค่า Reversal time จากการกลับทิศทางของแมกนีไตเซชันเนื่องจากสนามแม่เหล็กสลับ มีค่าน้อยกว่า Relaxation time ของอนุภาค ด้วยการให้สนามแม่เหล็กสลับที่มีความถี่สูงมากเพียงพอ ความร้อนที่เกิดจากการกลับทิศทางของแมกนีไตซันจะถูกปลดปล่อยออกสู่บริเวณแวดล้อม (Surrounding) และหากสามารถทำการควบคุมอุณหภูมิให้คงไว้ที่ 42-43 °C ได้เป็นระยะเวลาเท่ากับหรือนานกว่า 30 min เซลล์มะเร็งที่ได้รับผลกระทบจากความร้อนนี้ก็จะถูกทำลาย ในขณะที่เซลล์ปกติสามารถคงทนต่อความร้อนได้จนถึง 46 °C โดยไม่เกิดความเสียหาย [23-24] วิธีการรักษาโรคมะเร็งด้วยความร้อนที่เกิดขึ้นจากอนุภาคนาโนแม่เหล็กนี้ เรียกว่า Magnetic hyperthermia therapy

เมื่ออนุภาคนาโนเหล็กออกไซด์ถูกรวมเข้าเป็นส่วนประกอบหนึ่งของแก้วชีวภาพ การใช้ประโยชน์ทางการแพทย์ในกระบวนการรักษาโรคมะเร็งกระดูกควบคู่กับการซ่อมแซมชิ้นส่วนที่เสียหายด้วยวัสดุปลูกถ่ายทดแทนกระดูกสังเคราะห์ที่มีความเข้ากันได้ทางชีวภาพ (Biocompatibility) จึงสามารถเกิดขึ้นได้



รูปที่ 8 การรวมอนุภาคนาโนแม่เหล็กเข้ากับแก้วชีวภาพแบบรูพรุนช่วยสร้างประโยชน์ในรักษาโรคกระดูกแบบมัลติฟังก์ชัน



รูปที่ 9 ไดอะแกรมแสดงขั้นตอนการใช้ประโยชน์แบบมัลติฟังก์ชันของแก้วชีวภาพแบบรูพรุนที่มีส่วนประกอบของอนุภาคนาโนเหล็กออกไซด์ในกระบวนการรักษาโรคมะเร็งกระดูก (ดัดแปลงจาก [25])

เมื่อกระดูกส่วนที่เป็นมะเร็งถูกผ่าตัดออก บางส่วนของเซลล์มะเร็งอาจไม่สามารถเอาออกไปได้หมด การใช้แก้วชีวภาพแบบรูพรุนที่มีส่วนประกอบของอนุภาคนาโนเหล็กออกไซด์เป็นวัสดุปลูกถ่ายทดแทนกระดูกส่วนที่บกพร่องไปนี้ ทำให้สามารถใช้ประโยชน์ในการทำลายเซลล์มะเร็งที่ยังคงหลงเหลืออยู่ได้ด้วยการรักษาแบบ Local hyperthermia therapy ด้วยความร้อนที่เกิดขึ้น ขณะอยู่ในสนามแม่เหล็กสลับจากภายนอก การเกิดความร้อนเฉพาะจุดตำแหน่งที่ใกล้ชิดกับเซลล์มะเร็ง ภายใต้การควบคุมช่วงอุณหภูมิและระยะเวลาที่เหมาะสม จะไม่สร้างความเสียหายแก่เซลล์ที่ยังคง

สมบูรณ์ปกติ หรือหากมีการแพร่กระจายของเซลล์มะเร็งออกห่างจากตำแหน่งปลูกถ่ายกระดูก การให้ยารักษาโรคมะเร็งแบบเฉพาะจุด (Local drug delivery) ซึ่งใช้ประโยชน์จากลักษณะความเป็นรูพรุนในการบรรจุ (Loading) และปลดปล่อยยา (Release) ออกมาเพื่อทำการรักษาหรือป้องกันการแพร่กระจายของเซลล์มะเร็งเหล่านี้ จะสร้างผลกระทบที่น้อยกว่าการใช้วิธีเคมีบำบัด (Chemotherapy) หรือการใช้รังสีรักษา (Radiotherapy) อย่างมากมาย [25-26] อีกทั้งยังเป็นวัสดุทดแทนกระดูกที่สามารถสลายตัวเองพร้อมกับก่อเกิดเฟสแร่ธาตุกระดูกซึ่งจะพัฒนาต่อไปเป็นเนื้อเยื่อกระดูก ด้วยคุณสมบัติทางชีวภาพที่เพิ่มขึ้นตามพื้นที่ผิวสัมผัสซึ่งเพิ่มขึ้นเนื่องจากความเป็นรูพรุน แก้วชีวภาพแบบรูพรุนที่มีองค์ประกอบร่วมของอนุภาคนาโนเหล็กออกไซด์จึงมีคุณสมบัติเหมาะสม สำหรับการเป็นวัสดุปลูกถ่ายกระดูกในอุดมคติ นำมาสู่การวิจัยและพัฒนาอย่างกว้างขวางในปัจจุบัน

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณการสนับสนุนทุนวิจัยระดับบัณฑิตศึกษา จากมูลนิธิการศึกษาเชล 100 ปี ปีการศึกษา 2556

เอกสารอ้างอิง

[1] Hench, L. L., The story of Bioglass®, Journal of Materials Science: Materials in Medicine, 2006, vol.17, pp. 967-978.

[2] Jones, J. R., Review of bioactive glass: From Hench to hybrids-REVIEW, Acta Biomaterialia, 2013, vol.9, pp.4457-4486.

[3] Hench, L. L., Chronology of bioactive glass development and clinical applications, New Journal of Glass and Ceramics, 2013, vol.3, pp.68-70.

[4] Gunawidjaja, P. N., Mathew, R., Lo, A. Y. H., Izquierdo-Barba, I., García, A., Arcos, D., Vallet-Regí, M., Edén, M., Local structures of mesoporous bioactive glasses and their surface alterations in vitro: inferences from solid-state nuclear magnetic resonance, Philosophical Transactions of the Royal Society A, 2012, vol.370, p.1377.

[5] Ebisawa, Y., Kokubo, T., Bioactivity of CaO· SiO_2-based glasses: *in vitro* evaluation, Journal of Materials Science: Materials in Medicine, 1990, vol.1, pp.239-244.

[6] Arcos, D., Vallet-Regí, M., Sol–gel silica-based biomaterials and bone tissue regeneration-REVIEW, Acta Biomaterialia, 2010, vol.6, pp.2874-2888.

[7] Hench, L. L., Andersson, Ö., Advanced series in ceramics – vol.1 an introduction to bioceramics: bioactive glasses (2nd ed.), Singapore: World Scientific, 1999, pp.41-62.

[8] Gerhardt, L. C., Boccaccini, A.R., Bioactive glass and glass-ceramics scaffolds for bone tissue engineering-REVIEW, Materials, 2010, vol.3, pp.3867-3910.

[9] De Aza, P. N., De, Aza, A. H., Pena, P., De Aza, S., Bioactive glasses and glass-ceramics, Boletin De La Sociedad Española De Cerámica y Vidrio Articulo De Revissión, 2007, vol.46(2), pp.45-55.

[10] Filho, O. P., LaTorre, G. P., Hench, L. L., Effect of crystallization on apatite-layer formation of bioactive glass 45S5, Journal of Biomedical Materials Research, 1996, vol.30, pp.509–514.

[11] Cormack, A.N., Tilocca, A., Structure and biological activity of glasses and ceramics, Philosophical Transactions of the Royal Society A, 2012, vol.370, pp.1271-1280.

[12] Lutišanová, G., Palou, M., Kozánková, Comparison of bioactivity in vitro of glass and glass ceramic materials during soaking in SBF and DMEM medium, Ceramics, 2011, vol.55(3), pp.199-207.

[13] Wu, C., Chang, J., Mesoporous bioactive glasses: structure characteristics, drug/growth factor delivery and bone regeneration application-REVIEW, Interface Focus, 2012, vol.2, pp.292-306.

[14] Hench, L. L., Bioceramics: from concept to clinic, Journal of the American Ceramic Society, 1991, vol.74, pp.1487–1510.

[15] Jones, J. R., Lin, S., Yue, S., Lee, P. D., Hanna, J. V., Smith, M. E., & Newport, R. J., Bioactive glass scaffolds for bone regeneration and their hierarchical characterisation, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine, 2010224, pp.1374-1375.

[16] Cacciotti, I., Lombardi, M., Bianco, A., Ravaglioli, A., Montanaro, L., Sol-gel derived 45S5 bioglass: synthesis, microstructural evolution and thermal behavior, Journal of Materials Science: Materials in Medicine, 2012, vol.23, pp.1849-1866.

[17] Zhu, Y., Kaskel, S., Comparison of the in vitro bioactivity and drug release property of mesoporous bioactive glasses (MBGs) and bioactive glasses (BGs) scaffolds, Microporous and Mesoporous Materials, 2009, 118, pp.176-182.

[18] Lucas-Girot, A., Mezahi, F. Z., Mami, M., Oudadesse, H., Harabi, A., Floch, M. L., Sol–gel synthesis of a new composition of bioactive glass in the quaternary system SiO_2–CaO–Na_2O–P_2O_5 comparison with melting method, Journal of Non-Crystalline Solids, 2011, vol.357, pp.3322-3327.

[19] Martin, R. A., Yue, S., Hanna, J. V., Lee, P. D., Newport, R. J., Smith, M. E., Jones, J. R., Characterizing the hierarchical structures

of bioactive sol-gel silicate glass and hybrid scaffolds for bone regeneration, Philosophical Transactions of the Royal Society A, 2012, vol.370, pp.1422-1443.

[20] Benz, M., Superparamagnetism: theory and applications, 2012, pp.1-27 Retrieved from http://www.microstructure.ethz.ch/FILE/1302_Superparamegnetism_Manuel Benz.pdf

[21] Pankhurst, Q. A., Connolly, J., Jones, S. K., & Dobson, J., Applications of magnetic nanoparticles in biomedicine, Journal of Physics D: Applied Physics, 2003, vol.36, pp.R167-R181.

[22] Callister, W. D. Jr., Materials science and engineering: an introduction (7th ed), 2007, pp.755-756, New York, NY: John Wiley & Sons, Inc.

[23] Wang, D., Lin, H., Jiang, J., Han, X., Guo, W., Wu, X., Jin, Y., Qu, F., One-pot synthesis of magnetic, macro/meso porous bioactive glasses for bone tissue engineering, Science and Technology of Advanced Materials, 2013, vol.14, 025004 (9pp).

[24] Shankhwar, N., Singh, R. K., Kothiyal, G. P., Perumal, A., & Srinivasan, A., Evolution of magnetic properties of CaO-P_2O_5-Na_2O-Fe_2O_3-SiO_2 glass upon heat treatment, IEEE Transactions on Magnetics, 2014, vol.50(1), 4003504, pp.1-4.

[25] Wu, C., Fan, W., Zhu, Y., Gelinsky, M., Chang, J., Cuniberti, G., Albrecht, V., Friis, T., & Xiao, Y., Multifunctional magnetic mesoporous bioactive glass scaffolds with a hierarchical pore structure, Acta Biomaterialia, 2011, vol.7, pp.3563-3572.

[26] Singh, R. K., Srinivasan, A., & Kothiyal, G. P., Evaluation of CaO-SiO_2-P_2O_5-Na_2O-Fe_2O_3 bioglass-ceramics for hyperthermia application, Journal of Materials Science: Materials in Medicine, 2009, vol.20, pp.S147-S151

ต่อจากหน้า 14

และรูพรุนเช่นขนาดและรูปร่างส่งผลต่อฟลักซ์ของของเหลว บทความนี้ได้ใช้ตัวถูกละลายเป็นกลางทางไฟฟ้าและเมมเบรนที่มีรูพรุนทรงกระบอกขนาดยาวเป็นตัวอย่าง แต่สมบัติพื้นฐานอื่น ๆ เช่นประจุไฟฟ้าบนพื้นผิวของตัวถูกละลายและรูพรุนก็จะส่งผลต่อการไหลของของเหลวในกระบวนการออสโมซิสเช่นกัน [4]

เอกสารอ้างอิง

[1] P. Ray, On the theory of osmotic water movement, Plant Physiol. 35 (1960) 783.

[2] J.L. Anderson, D.M. Malone, Mechanism of osmotic flow in porous membranes, Biophys. J. 14 (1974) 957.

[3] G. Bhalla, W.M. Deen , Effects of molecular shape on osmotic reflection coefficients, J. Membr. Sci. 306 (2007) 116.

[4] G. Bhalla, W.M. Deen, Effects of charge on osmotic reflection coefficients of macromolcules in porous membranes, J. Colloid Interf. Sci. 333 (2009) 363.

ผลการแปลงลาปลาซและการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์

สุวภัทร บุญผาสุข [1] พงษ์พิชิต จันทร์นุ้ย [2] และ จรรยารักษ์ ทองสมพร [3]

1. บทนำ

มีบางคนเคยบอกไว้ว่า หากไม่มี ไอแซกซ์ นิวตัน เราก็จะไม่ได้เรียนวิชาแคลคูลัส ดูไปดูมาท่าจะจริง! ทุกวันนี้ วิชาแคลคูลัสเป็นหัวใจพื้นฐานและสำคัญต่อการศึกษาระบบในหลายๆ สาขาวิชา ยิ่งสมัยนี้ แคลคูลัส ได้แทรกซึมลงไปในระดับมัธยมศึกษาแล้ว นอกจากนี้ เนื้อหาในหลักสูตรอาจรวมไปถึงการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แล้วด้วยซ้ำ อย่างไรก็ตาม นักเรียน นักศึกษาจะได้เรียนเนื้อหาที่เข้มข้นมากขึ้นในระดับปริญญาตรี เช่น สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับต่าง ๆ ทั้งแบบเอกพันธุ์และแบบไม่เอกพันธุ์ เป็นต้น พูดง่ายๆ คือ การมีความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ดีจะทำให้เราทำงานได้ง่ายขึ้น

มีนักคณิตศาสตร์ที่ทำการศึกษา ค้นคว้าในเรื่องเทคนิคการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์จนเป็นที่ยอมรับของนักคณิตศาสตร์และบุคคลทั่วไป เขาผู้นั้น คือ ปิแอร์ ลาปลาซ (Pierre Simon de Laplace) เป็นที่ทราบกันดีว่าผลการแปลงลาปลาซมีประโยชน์อย่างมากในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ได้เป็นอย่างดี โดยเฉพาะรายวิชาของฟิสิกส์ สมการเชิงอนุพันธ์ถือเป็นปราการด่านต้นๆที่เราจะต้องเจอ

หัวใจสำคัญของผลการแปลงลาปลาซ คือ ผลการแปลงลาปลาซสามารถเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ไปเป็นสมการพีชคณิตซึ่งอาศัยทักษะของ การบวก ลบ คูณ หาร เท่านั้นเอง อย่างไรก็ตาม ตลอดสองข้างทางที่เราจะเดินทางไปอาจไม่สวยหรูนัก จะมีเรื่องการอินทิเกรตโผล่มากวนใจเป็นระยะๆ แต่กระนั้นก็ตาม ดินแดนหลังเส้นชัยจะปราศจากเรื่องกวนใจเหล่านั้น สำหรับงานเขียนนี้ เราศึกษาผลการแปลงลาปลาซแบบต่างๆสมบัติบางอย่างของผลการแปลงลาปลาซ ผลการแปลงลาปลาซกับฟังก์ชันบางชนิด ผลการแปลงลาปลาซผกผันและการนำผลการแปลงลาปลาซไปใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาทางฟิสิกส์

2. รูปแบบการแปลงลาปลาซและลาปลาซผกผัน

2.1 การแปลงลาปลาซ

เพื่อให้เกิดอรรถรสในการอ่านมากยิ่งขึ้น ก่อนที่เราจะนำผลการแปลงลาปลาซไปประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ในช่วงต่อจากนี้ เราจะกำหนดรูปแบบและกล่าวถึงข้อมูลทั่วไปของการแปลงลาปลาซ เริ่มต้นจาก กำหนดให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงใดๆสำหรับทุกค่าจำนวนจริง t เมื่อ $t \geq 0$ เราเขียนผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ ซึ่งนิยมแทนด้วยสัญลักษณ์ $F(s)$ หรือ $L\{f(t)\}$ นิยามโดย

$$L\{f(t)\} \equiv F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (1)$$

สำหรับทุกค่าของจำนวนจริง s (หรือจำนวนเชิงซ้อน) ที่ทำให้การอินทิเกรตตามสมการ (1) ลู่เข้า และผลการแปลงลาปลาซจะมีจริง ถ้าผลของการอินทิเกรตตามสมการ (1) นั้นสามารถหาค่าได้ แม้ว่าผลการแปลงลาปลาซจะสามารถทำให้เราหลบหลีกการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีปกติ แต่ในหัวข้อนี้คงยากที่จะหลีกเลี่ยงลิมิต (Limit) และการอินทิเกรต อย่างไรก็ตามประเด็นดังกล่าวไม่ใช่หัวใจสำคัญของบทความชิ้นนี้ แต่เป็นเพียงทางผ่านไปสู่รูปแบบหรือสูตรที่เราจะใช้แก้ปัญหาด้วยผลการแปลงลาปลาซเท่านั้นเอง ต่อไปจะกล่าวถึงตัวอย่างผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่างๆ ดังนี้

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันคงตัว

ตัวอย่างที่ง่ายที่สุดคือ ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว แทนด้วย A จากข้อมูลทั่วไปที่ได้กล่าวมาข้างต้น ทำให้เราสามารถหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ ในกรณีนี้ได้ กล่าวคือ

$$L\{f(t)\} = A\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-st}dt = \frac{A}{s}\lim_{n\to\infty}\left[-e^{-st}\right]_{t=0}^{t=n}$$
$$= \frac{A}{s}\lim_{n\to\infty}\left[-e^{-sn}+1\right] \quad = \frac{A}{s} \qquad (2)$$

[1] นักศึกษาระดับปริญญาตรี หลักสูตรวิทยาศาสตร์เชิงคำนวณ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ ม.วลัยลักษณ์ จ.นครศรีธรรมราช

[2] อาจารย์ (ดร) สาขาวิชาฟิสิกส์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ ม.วลัยลักษณ์ จ.นครศรีธรรมราช

[3] อาจารย์ (ดร) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ ม.วลัยลักษณ์ จ.นครศรีธรรมราช

ในที่นี้ เราสามารถดึงค่าคงตัว A ออกนอกการอินทิเกรตได้ และ $\lim_{n\to\infty} e^{-sn}$ ลู่เข้า เมื่อ $s>0$ ดังนั้น เราจะได้

$$L\{f(t)\}=\frac{A}{s} \text{ โดยมีเงื่อนไข คือ } s>0 \qquad (3)$$

อย่างไรก็ตาม ถ้า $s=0$ ผลการอินทิเกรตของสมการ (2) จะหาค่าไม่ได้

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ในกรณีต่อมา เราจะพิจารณาในกรณีที่ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพแนนเชียล พิจารณาให้ $f(t)=e^{\alpha t}$ โดยที่ α เป็นค่าคงตัว เราจะได้ว่าผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ คือ

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= \int_0^n e^{(\alpha-s)t}dt \\ &= \frac{1}{\alpha-s}\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{(\alpha-s)t}dt \\ &= \frac{1}{\alpha-s}\lim_{n\to\infty}\left[e^{(\alpha-s)t}\right]_{t=0}^{t=n} \\ &= \frac{1}{\alpha-s}\lim_{n\to\infty}\left[e^{(\alpha-s)n}-1\right] \end{aligned} \qquad (4)$$

ผลการคำนวณบอกเราว่า ถ้า $\alpha-s>0$ หรือ $\alpha>s$ เอกซ์โพเนนเชียลจะมีค่าเป็น บวก และจะเพิ่มมากขึ้นเมื่อ t มีค่าเข้าใกล้อนันต์ ในทางกลับกันถ้า $\alpha<s$ เอกซ์โพเนนเชียลจะมีค่าเป็นลบ และเมื่อ t เพิ่มมากขึ้นจะทำให้เอกซ์โพเนลเชียลมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ($\lim_{n\to\infty} e^{(\alpha-s)n}$ ลู่เข้า เมื่อ $\alpha-s<0$) ดังนั้นสำหรับกรณีนี้เราจะได้

$$L\{e^{\alpha t}\}=\frac{1}{s-\alpha} \text{ โดยที่ } s>a \qquad (5)$$

จะเห็นได้ว่าสำหรับกรณีที่ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพแนนเชียล คำตอบที่ได้จะซับซ้อนกว่าในกรณีแรก

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

นอกจากตัวอย่างของฟังก์ชัน $f(t)$ ที่ได้แสดงไว้ข้างต้นแล้ว ยังพบว่ามีตัวอย่างพื้นฐานที่สำคัญอื่นๆอีก เช่น ฟังก์ชันไซน์ และฟังก์ชันโคไซน์ ในการคำนวณผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันดังกล่าวทำได้ง่ายหากอาศัยการอินทิเกรตบางส่วน (integration by part) ดังนี้

$$\begin{aligned} L\{\cos\alpha t\} &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-st}\cos\alpha t dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\cos\alpha t\right]_{t=0}^{t=n} - \frac{\alpha}{s}\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-st}\sin\alpha t dt \\ &= \frac{1}{s}-\frac{\alpha}{s}L\{\sin\alpha t\} \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} L\{\sin\alpha t\} &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-st}\sin\alpha t dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\sin\alpha t\right]_{t=0}^{t=n} - \frac{\alpha}{s}\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-st}\cos\alpha t dt \\ &= \frac{1}{s}-\frac{\alpha}{s}L\{\cos\alpha t\} \end{aligned} \qquad (7)$$

โดยการแทนค่า $L\{\sin\alpha t\}$ ของสมการ (7) ลงในสมการ (6) จะได้ว่า

$$L\{\cos\alpha t\}=\frac{1}{s}-\frac{\alpha}{s}\left(\frac{1}{s}-\frac{\alpha}{s}L\{\cos\alpha t\}\right)$$

นั่นคือ

$$L\{\cos\alpha t\}=\frac{s}{s^2+\alpha^2} \qquad (8)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันไซน์ทำได้โดยการแทนค่า $L\{\cos\alpha t\}$ จากสมการ (8) ลงในสมการ (7) เราพบว่า

$$L\{\sin\alpha t\}=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \qquad (9)$$

เราสามารถนำหลักการคำนวณที่ได้กล่าวมาเพื่อคำนวณหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันอื่นๆ ในที่นี้ เราขอสรุปผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐานต่างๆดังตารางที่ 1[1,2]

$f(t)$	$F(s)$
a	a/s
$t^n, n=1,2,3,...$	$n!/s^{n+1}$
$e^{at}t^n, n=1,2,3,...$	$n!/(s-a)^{n+1}$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$

$f(t)$	$F(s)$
$\sinh(at)$	$a/\left(s^2-a^2\right)$
$\cosh(at)$	$s/\left(s^2-a^2\right)$
e^{at}	$1/(s-a)$
$e^{at}\sin(bt)$	$a/\left((s-a)^2+b^2\right)$
$e^{at}\cos(bt)$	$(s-a)/\left((s-a)^2+b^2\right)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)+\ldots$ $+\ldots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$

ตารางที่ 1 แสดงตัวอย่างผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐาน

เนื่องจากบทความนี้จะเกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนั้น เราต้องศึกษาผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ด้วย ในหัวข้อต่อไปเราจะทบทวนผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

2.2 ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(t)$ เขียนแทนด้วย $df(t)/dt$ การแปลงลาปลาซของ $df(t)/dt$ และอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นไปสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}=\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt \qquad (10)$$

เราต้องการจัดรูปแบบสมการด้านบนเล็กน้อยโดยอาศัยความสัมพันธ์

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-st}f(t)\right]=f(t)\frac{de^{-st}}{dt}+e^{-st}\frac{df(t)}{dt} \qquad (11)$$

อาศัยความสัมพันธ์ตามสมการ (11) เราสามารถเปลี่ยนรูปแบบของสมการ (10) ได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-st}\frac{df(t)}{dt}=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{d}{dt}\left[e^{-st}f(t)\right]-\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(t)\frac{de^{-st}}{dt} \qquad (12)$$

จากสมการ (12) เราพบว่า

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{d}{dt}\left[e^{-st}f(t)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[e^{-st}f(t)\right]_{t=n}-\left[e^{-st}f(t)\right]_{t=0} \qquad (13)$$
$$=f(0)$$

และ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(t)\frac{de^{-st}}{dt}=sL\left\{f(t)\right\}=sF(s) \qquad (14)$$

ซึ่งเราพบว่า พจน์แรกของสมการ (13) จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ขั้นตอนต่อไป คือ รวมทุกๆพจน์เข้าด้วยกัน หลังจากอาศัยพีชคณิตง่ายๆเราพบว่าผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(t)$ คือ

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}=sF(s)-f(0) \qquad (15)$$

โดยที่ $f(0)$ คือฟังก์ชัน $f(t)$ คำนวณโดยใช้เงื่อนไข $t=0$ นอกจากนี้ เราสามารถอาศัยรูปแบบที่ได้กล่าวมานั้นแสดงการหาผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับสอง ผลจากการคำนวณพบว่า

$$L\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0) \text{ โดย}$$
$$f'(0)\equiv\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0} \qquad (16)$$

ดูๆไปแล้ว หากต้องการแสดงการหาผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชันอันดับที่สูงขึ้นไปคงทำได้ไม่ยากเย็นเท่าไหร่! ใช่ไหมละครับ? อย่างไรก็ตาม เราขอหยุดไว้ที่การหาผลการแปลงลาปลาซสำหรับอนุพันธ์อันดับที่สองเพราะปัญหาทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้องกับงานเขียนฉบับนี้จะพุ่งเป้าไปที่อนุพันธ์ของฟังก์ชันอันดับที่ 1 และ 2 เท่านั้น

2.3 ผลการแปลงลาปลาซผกผัน

ในหัวข้อที่แล้ว เรากล่าวถึงการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ ต่อไปเราจะศึกษารูปแบบที่ตรงกันข้าม กล่าวคือ หากเราทราบผลการแปลงลาปลาซ ($F(s)$) แล้วจะคำนวณหาฟังก์ชันตั้งต้นได้อย่างไร? กล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ เมื่อโจทย์กำหนด $F(s)$ เราจะหาฟังก์ชันในรูปแบบของตัวแปร t ได้อย่างไร? เราเรียกผลการแปลงในลักษณะนี้ว่า การแปลงลาปลาซผกผัน (inverse Laplace transformation) นิยมเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $L^{-1}\{F(s)\}$ กล่าวคือ

$$f(t)=L^{-1}\left\{F(s)\right\} \qquad (17)$$

เมื่อ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ และเรียก L^{-1} ว่าตัวดำเนินการลาปลาซผกผัน ผลการแปลงลาปลาซผกผันเป็นส่วนสำคัญสำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ตามวิธีการของผลการแปลงลาปลาซ เป็นที่ทราบกันดีว่าการใช้วิธีการของผลการแปลงลาปลาซในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์นั้น เราจะได้ผลเฉลยในรูปของฟังก์ชัน $F(s)$ ดังนั้นการคำนวณหาผลการแปลงลาปลาซผกผันจะให้ผลเฉลยในรูปของตัวแปรตั้งต้น t ซึ่งจุดนี้คือเป้าหมายของเรา เราจะเริ่มต้นด้วยตัวอย่างง่ายๆโดยกำหนดให้ $F(s)=5/s$ จากรูปแบบที่ได้คุยกันมาก่อนหน้า เราสามารถคาดเดาจากรูปแบบตามสมการ (17) ได้ว่า $f(t)=L^{-1}\{5/s\}=5$ หรือลองดูอีกสักตัวอย่างหนึ่ง $F(s)=1/(s^2+1)$ นั่นคือ $f(t)=L^{-1}\{1/(s^2+1)\}=\sin t$

การบ้าน: จงคำนวณหา a) $L^{-1}\{3/(s^2+9)\}$ b) $L^{-1}\{s/(s^2+9)\}$ และ c) $L^{-1}\{24/s^5\}$

สมบัติพื้นฐานบางประการของผลการแปลงลาปลาซผกผัน เช่น

1. สมบัติเชิงเส้น (linear property)

ถ้า $L\{f(t)\}=F(s)$ และ $L\{g(t)\}=G(s)$ และ c_1, c_2 เป็นค่าคงที่ใดๆ จะได้ว่า

$$L^{-1}\{c_1F(s)+c_2G(s)\}=c_1L^{-1}\{F(s)\}+c_2L^{-1}\{G(s)\} \quad (18)$$

เช่น

$$L^{-1}\{4/s+3/s^2\}=L^{-1}\{4/s\}+L^{-1}\{3/s^2\}=4+3t$$

เป็นต้น

2.สมบัติการเลื่อนที่ (translation property)

ถ้า $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ แล้วจะได้ว่า

$$L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}L^{-1}\{F(s)\}=e^{at}f(t) \quad (19)$$

เช่น $L^{-1}\{(s-2)/[(s-2)^2+16]\}=e^{2t}\cos 4t$

3.สมบัติการเปลี่ยนสเกล (change of scale property)

ถ้า $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ และ k เป็นค่าคงที่ใดๆ จะได้ว่า $L^{-1}\{F(ks)\}=\frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)$ (20)

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถนำหลักการคำนวณที่ได้กล่าวมาไปคำนวณหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันอื่นๆ ในที่นี้ เราขอสรุปดังตารางที่ 2[1,2]

$F(s)$	$f(t)$
a/s	a
$n!/s^{n+1}$	$t^n, n=1,2,3,...$
$n!/(s-a)^{n+1}$	$e^{at}t^n, n=1,2,3,...$
$a/(s^2+a^2)$	$\sin(at)$
$s/(s^2+a^2)$	$\cos(at)$
$a/(s^2-a^2)$	$\sinh(at)$
$s/(s^2-a^2)$	$\cosh(at)$
$1/(s-a)$	e^{at}
$a/((s-a)^2+b^2)$	$e^{at}\sin(bt)$
$(s-a)/((s-a)^2+b^2)$	$e^{at}\cos(bt)$
$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)+$ $+...-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$	$f^{(n)}(t)$

ตารางที่ 2 แสดงตัวอย่างผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันพื้นฐาน

จากรูปแบบที่ได้กล่าวมา ตอนนี้เรามีความพร้อมสำหรับการนำผลการแปลงลาปลาซไปศึกษาและแก้ปัญหาพื้นฐานทางฟิสิกส์โดยจะมุ่งเน้นไปที่ปัญหาในระดับปริญญาตรี เช่น กลศาสตร์และฟิสิกส์นิวเคลียร์ เป็นต้น

3. ผลการแปลงลาปลาซและการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์

หากเปรียบเทียบงานเขียนชิ้นนี้กับรายการอาหารแล้ว หัวข้อที่ผ่านมาคงเป็นเพียงอาหารเรียกน้ำย่อยเท่านั้น เพื่อให้ครบสูตรเมนูอาหารสำหรับฟูลคอร์สนี้ เราจะนำความรู้จากผลการแปลงลาปลาซมาช่วยแก้ปัญหาพื้นฐานทางฟิสิกส์โดยจะแบ่งตามรายวิชาดังนี้

3.1 ฟิสิกส์นิวเคลียร์: การสลายตัวของธาตุกัมมันตรังสี

ในฟิสิกส์นิวเคลียร์ สมการพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับการสลายตัว (decay) ของธาตุหรือสารกัมมันตรังสีเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 จากการทดลองพบว่าอัตราการสลายตัวของนิวเคลียสจะแปรผันตรงกับจำนวนนิวเคลียสที่มีอยู่ในขณะนั้น (N) เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\frac{dN(t)}{dt}=-\lambda N(t) \quad (21)$$

เมื่อ λ คือค่าคงที่ของการสลายตัว เครื่องหมาย ลบ บ่งบอกถึงการลดจำนวนของนิวเคลียสนั่นเอง เริ่มต้นแก้สมการด้วยผลการแปลงลาปลาซโดยพิจารณาการแปลงลาปลาซของทั้งสองข้างของสมการ (21) และพบว่า

$$L\left\{\frac{dN(t)}{dt}\right\} = L\{-\lambda N(t)\} \tag{22}$$

อาศัยผลการแปลงลาปลาซจากตารางที่ 1 เราจะได้

$$s\tilde{N}(s) - N(0) = -\lambda N(s)$$

เมื่อ $\tilde{N}(s) \equiv L\{N(t)\}$ (23)

เราพบว่าไม่สามารถหาผลเฉลยเฉพาะรายได้หากไม่ทราบจำนวนนิวเคลียสเริ่มต้น $(N(0))$ ดังนั้นเราขอเดินตามรอยประเพณีนิยมโดยกำหนดให้จำนวนนิวเคลียสก่อนมีการสลายตัวเท่ากับ N_0 ซึ่งจะเห็นว่าสำหรับกรณีนี้ $N(0) = N_0$ ขั้นตอนต่อไป คือ แก้สมการพีชคณิตของสมการ (23) เพื่อหา $\tilde{N}(s)$ และเราจะได้

$$\tilde{N}(s) = \frac{N_0}{s+\lambda} \tag{24}$$

งานของเราก็เหลืออีกนิดเดียวเท่านั้น คือ ต้องหาผลเฉลยในพจน์ของตัวแปร t ที่สอดคล้อง $\tilde{N}(s)$ นั่นก็คือการหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของสมการที่ (24) ผลลัพธ์ที่ได้คือผลเฉลยที่เราต้องการนั่นเอง อาศัยตารางที่ 2 เราสามารถหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของสมการ (24) ได้ กล่าวคือ

$$L^{-1}\left\{\tilde{N}(s)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{N_0}{s+\lambda}\right\} \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{25}$$

หากคุ้นเคยเรื่องนี้ดี เราจะเห็นว่าผลเฉลยที่ได้ตามสมการที่ (25) เป็นผลเฉลยที่ถูกต้องนั่นเอง เพื่อให้อาหารมื้อนี้มีอรรถรสมากขึ้น เราขอนำทุกท่านสู่รูปแบบทั่วไปมากยิ่งขึ้น

3.2 ฟิสิกส์กับสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่ 2

ก่อนจะพูดคุยเกี่ยวกับตัวอย่างของปัญหาอื่นๆที่เราจะเจอในฟิสิกส์ เราขอเริ่มต้นด้วยสมการการเคลื่อนที่ภายใต้แรงหน่วงดังนี้[3]

$$mf''(t) + \lambda f'(t) + kf(t) = g(t)$$

เมื่อ $f''(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$ และ $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ (26)

โดยที่ λ, k เป็นจำนวนจริงบวกคงตัว สำหรับผู้ที่มีประสบการณ์ท่องยุทธจักรจะเห็นว่าสมการด้านบนก็คือสมการฮาร์มอนิกส์แบบหน่วง (damped driven harmonic oscillator) ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดคือ ระบบมวล (m) ติดกับสปริง และมีปัจจัยภายนอกกระทำต่อระบบ $(g(t))$ ซึ่งอาจจะเป็นแรงภายนอกก็ได้ จัดสมการ (26) เพื่อสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$f''(t) + 2\gamma f'(t) + \omega_0^2 f(t) = h(t) \text{ เมื่อ } 2\gamma = \frac{\lambda}{m}$$

และ $h(t) = \frac{g(t)}{m}$ (27)

ต่อไปเราจะเข้าสู่กระบวนการการหาผลการแปลงลาปลาซของสมการ (27) นั่นคือ

$$L\{f''(t)\} + 2\gamma L\{f'(t)\} + \omega_0^2 L\{f(t)\} = L\{h(t)\} \tag{28}$$

มองตารางที่ 1 และออกแรงเล็กน้อย เราจะพบว่าผลการแปลงลาปลาซของสมการ (28) คือ

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) + 2\gamma sF(s) - 2\gamma f(0) + \omega_0^2 F(s) = H(s) \tag{29}$$

เมื่อ $F(s) = L\{f(t)\}$ และ $H(s) = L\{h(t)\}$ เราจะเห็นว่าสมการข้างบนเป็นแค่สมการพีชคณิตธรรมดาๆนี่เอง อย่างที่เราได้คุยในตัวอย่างแรกไปแล้วนั้น การหาผลเฉลยจำเป็นอย่างยิ่งที่เราจะต้องทราบเงื่อนไขเริ่มต้น สำหรับ $f(0)$ และ $f'(0)$ จากสมการ (29) เราพบว่า

$$F(s) = \frac{(s+2\gamma)f(0) + f'(0) + H(s)}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2} \tag{30}$$

เราต้องการเขียนสมการ (30) ในพจน์ของตัวแปร t นั่นคือเราต้องคำนวณผลการแปลงลาปลาซผกผันนั่นเองอาศัยผลจากตารางที่ 2 เราจะได้

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}\left\{\frac{(s+2\gamma)f(0) + f'(0) + H(s)}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2}\right\} \\ &= L^{-1}\left\{\frac{(s+2\gamma)f(0) + f'(0)}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s2 + 2\gamma s + \omega_0^2}\right\} \end{aligned} \tag{31}$$

ในที่นี้ เรากำหนดให้ $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ ต่อไปมาดูตัวอย่างกันดีกว่า!

3.2.1 ฮาร์มอนิกส์ออสซิลเลเตอร์อย่างง่าย: $\gamma=0$ และ $g(t)=0$

กรณีนี้เป็นตัวอย่างแบบคลาสสิกซึ่งทุกๆคนที่เรียนฟิสิกส์จะต้องได้เจอ จากเงื่อนไข $\gamma=0$ และ $g(t)=0$ สมการ (31) ลดรูปเป็น

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{sf(0)+f'(0)}{s^2+\omega_0^2}\right\} \tag{32}$$

จากสมการ (32) เราอาศัยสมบัติเชิงเส้นสำหรับผลการแปลงลาปลาซผกผันจะได้

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}\left\{\frac{sf(0)+f'(0)}{s^2+\omega_0^2}\right\} \\ &= L^{-1}\left\{\frac{sf(0)}{s^2+\omega_0^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{f'(0)}{s^2+\omega_0^2}\right\} \end{aligned} \tag{33}$$

เมื่อ $f(0)$ และ $f'(0)$ เป็นค่าคงตัวใดๆ จากสมบัติข้างต้น เราพบว่า

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}\left\{\frac{sf(0)}{s^2+\omega_0^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{f'(0)}{s^2+\omega_0^2}\right\} \\ &= f(0)L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right\}+f'(0)L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\right\} \end{aligned} \tag{34}$$

จากตารางที่ 2 ผลที่ได้จากสมการ (34) คือ

$$f(t)=f(0)\cos\omega_0 t+\frac{f'(0)}{\omega}\sin\omega_0 t \tag{35}$$

ผลเฉลยสุดท้ายที่เราได้เป็นผลเฉลยที่อยู่ในรูปแบบมาตรฐานสำหรับฮาร์มอนิกส์ออสซิลเลเตอร์อย่างง่าย

3.2.2 ฮาร์มอนิกส์ออสซิลเลเตอร์แบบหน่วง: $g(t)=0$

สำหรับกรณีนี้ จากสมการ (31) เราพบว่า

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{(s+2\gamma)f(0)+f'(0)}{s^2+2\gamma s+\omega_0^2}\right\} \tag{36}$$

เพื่อให้การแปลงลาปลาซผกผันเป็นไปอย่างถูกต้อง เราจะพิจารณา

$$s^2+2\gamma s+\omega_0^2=(s+\gamma)^2+\omega_0^2-\gamma^2 \tag{37}$$

แทนสมการ (37) ลงในสมการ (36) เราพบว่า

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{(s+\gamma)f(0)+\gamma f(0)+f'(0)}{(s+\gamma)^2+\omega_0^2-\gamma^2}\right\} \tag{38}$$

ต่อไปเราจะแบ่งการพิจารณาเป็น 3 กรณี ดังนี้

- <u>การเคลื่อนที่ภายใต้แรงหน่วงที่น้อยเกินไป (under damping)</u>: $\omega_0^2-\gamma^2<0$ หรือ $\omega_0<\gamma$

สำหรับกรณีนี้ เราจะได้

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}\left\{\frac{(s+\gamma)f(0)}{(s+\gamma)^2-\omega^2}\right\} \\ &\quad +L^{-1}\left\{\frac{\gamma f(0)}{(s+\gamma)^2-\omega^2}\right\} \\ &\quad +L^{-1}\left\{\frac{f'(0)}{(s+\gamma)^2-\omega^2}\right\} \end{aligned} \tag{39}$$

เมื่อ $\omega^2\equiv\gamma^2-\omega_0^2$ ต่อไปจะหาผลการแปลงลาปลาซแบบพจน์ต่อพจน์ อาศัยตารางที่ 2 เราพบว่า

$$L^{-1}\left\{\frac{(s+\gamma)f(0)}{(s+\gamma)^2-\omega^2}\right\}=f(0)e^{-\gamma t}\cosh\omega t \tag{40}$$

และ

$$L^{-1}\left\{\frac{\gamma f(0)}{(s+\gamma)^2-\omega^2}\right\}=\frac{\gamma f(0)}{\omega}e^{-\gamma t}\sinh\omega t \tag{41}$$

และ

$$L^{-1}\left\{\frac{f'(0)}{(s+\gamma)^2-\omega^2}\right\}=\frac{f'(0)}{\omega}e^{-\gamma t}\sinh\omega t \tag{42}$$

ต่อไปแทนสมการ (40) (41) และ (42) ลงในสมการ (39) ดังนั้นผลเฉลยสำหรับกรณีฮาร์มอนิกส์ออสซิลเลเตอร์แบบหน่วง คือ

$$f(t)=f(0)e^{-\gamma t}\cosh\omega t+\frac{\gamma f(0)+f'(0)}{\omega}e^{-\gamma t}\sinh\omega t \tag{43}$$

- การเคลื่อนที่ภายใต้แรงหน่วงวิกฤต (critical damping):

$\omega_0^2 - \gamma^2 = 0$ หรือ $\omega_0 = \gamma$

สำหรับกรณีนี้ เราจะได้

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{f(0)}{(s+\gamma)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\gamma f(0)}{(s+\gamma)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{f'(0)}{(s+\gamma)^2}\right\} \quad (44)$$

อาศัยตารางที่ 2 เราพบว่าผลเฉลยเฉพาะรายในกรณีนี้ คือ

$$f(t) = \left(f(0) + \gamma f(0) + f'(0)t\right)e^{-\gamma t} \quad (45)$$

- การเคลื่อนที่ภายใต้แรงหน่วงที่มากเกินไป (over damping):

$\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$ หรือ $\omega_0 > \gamma$

สำหรับกรณีนี้ เราจะได้

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{(s+\gamma)f(0)}{(s+\gamma)^2 + \omega^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\gamma f(0)}{(s+\gamma)^2 + \omega^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{f'(0)}{(s+\gamma)^2 + \omega^2}\right\} \quad (46)$$

เมื่อ $\omega^2 \equiv \omega_0^2 - \gamma^2$ ต่อไปจะหาผลการแปลงาปลาซแบบพจน์ต่อพจน์ อาศัยตารางที่ 2 เราพบว่า

$$L^{-1}\left\{\frac{(s+\gamma)f(0)}{(s+\gamma)^2 + \omega^2}\right\} = f(0)e^{-\gamma t}\cos\omega t \quad (47)$$

และ

$$L^{-1}\left\{\frac{\gamma f(0)}{(s+\gamma)^2 + \omega^2}\right\} = \gamma f(0)e^{-\gamma t}\sin\omega t \quad (48)$$

และ

$$L^{-1}\left\{\frac{f'(0)}{(s+\gamma)^2 + \omega^2}\right\} = \frac{f'(0)}{\omega}e^{-\gamma t}\sin\omega t \quad (49)$$

ต่อไปแทนสมการ (47) (48) และ (49) ลงในสมการ (46) ดังนั้นผลเฉลยสำหรับกรณีฮาร์มอนิกส์ออสซิลเลเตอร์แบบหน่วง คือ

$$f(t) = f(0)e^{-\gamma t}\cos\omega t + \frac{\gamma f(0) + f'(0)}{\omega}e^{-\gamma t}\sin\omega t \quad (50)$$

จะเห็นว่า ถ้า $\gamma = 0$ ผลเฉลยจะลดรูปไปเท่ากับกรณีของฮาร์มอนิกส์ออสซิลเลเตอร์อย่างง่าย นอกจากตัวอย่างที่เราได้นำเสนอไปแล้วนั้น เราสามารถนำผลการแปลงลาปลาซไปศึกษาระบบวงจรไฟฟ้าได้ เช่น วงจร RL วงจร RC หรือแม้แต่วงจร RLC เป็นต้น เอาเป็นว่า เราขอละไว้เป็นการบ้านสำหรับผู้ที่สนใจละกันนะครับ!

4. สรุป

สำหรับการนำเสนอนี้ เราได้ศึกษารูปแบบผลการแปลงลาปลาซ ผลการแปลงลาปลาซแบบผกผันและการประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ในระดับปริญญาตรี เราได้ยกตัวอย่างพื้นฐานที่สำคัญๆ 3 แบบ ได้แก่ การสลายตัวของนิวเคลียสของธาตุกัมมันตรังสี ระบบฮาร์มอนิกส์อย่างง่ายและระบบที่มีการหน่วง เราเห็นความแตกต่างระหว่างการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบปกติ (ซึ่งเป็นรูปแบบที่เราต้องมีความรู้ในเรื่องหลักการอินทิเกรต) และแบบที่นำผลการแปลงลาปลาซมาใช้ ความเหมือนกัน คือ เราต้องทราบเงื่อนไขเริ่มต้น ส่วนความต่างสำหรับวิธีของการแปลงลาปลาซ คือ อาศัยความรู้ทางพีชคณิตเท่านั้น (กล่าวง่ายๆ คือ บวก ลบ คูณ และหาร) ทางผู้เขียนหวังว่า การนำเสนอนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้อ่านไม่มากก็น้อย

เฉลยการบ้าน

a) $\sin 3t$ b) $\cos 3t$ c) t^4

เอกสารอ้างอิง

[1] Joel L. Schiff, “The Laplace Transform: Theory and Applications”, springer

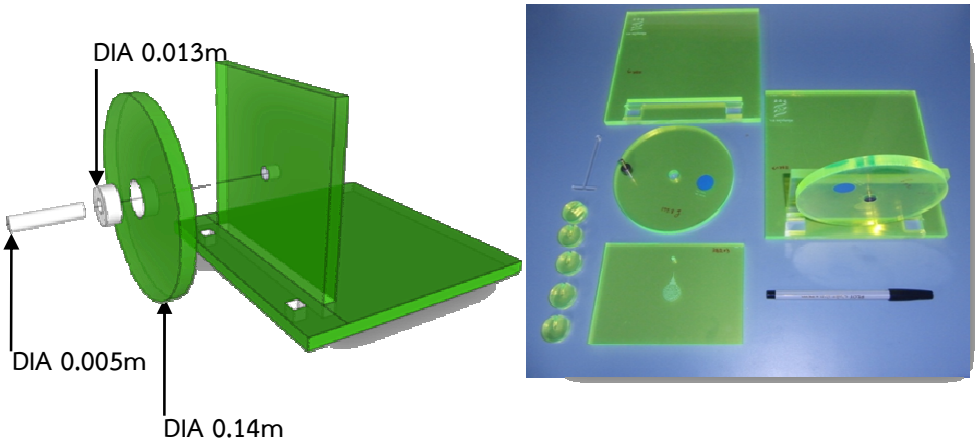
[2] Erwin Kreyszig, “Advanced Engineering Mathematics (International Student Version)”, 10th edition, John Wiley & Sons, inc.

[3] http://www.physnet.org/modules/pdf_modules/m.47pdf

การหาโมเมนต์ความเฉื่อยของจานหมุนด้วย Tracker

ธรรมรง เอียดคง [1], สัณหณัฐ ดีสมุทร [2], สรศักดิ์ ด่านวรพงศ์ [3]

การเรียนในรายวิชาปฏิบัติการฟิสิกส์จะมีชุดทดลองที่หลากหลาย ชุดทดลองการหมุนเป็นชุดทดลองหนึ่งที่สามารถพบเห็นได้ทั่วไปในห้องปฏิบัติการฟิสิกส์พื้นฐาน ซึ่งใช้ในการหาปริมาณต่างๆ เช่น ความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุม ทอร์ก โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุแข็งเกร็ง เป็นต้น ชุดทดลองเหล่านี้ส่วนใหญ่ต้องนำเข้าจากต่างประเทศ โดยกลไกการวัดมีทั้งแบบที่ใช้ Photo gate และ Rotary Motion Sensor [1] ตรวจจับการหมุน เพื่อนำมาวิเคราะห์เพื่อหาค่าทอร์กและค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุแข็งเกร็ง ข้อด้อยที่ชัดเจนของอุปกรณ์นำเข้านี้ คือ มีราคาสูง ระบบมีความซับซ้อนและไม่สามารถซ่อมบำรุงได้เอง จากปัญหาดังกล่าวในช่วงไม่กี่ปีที่ผ่านมาการวิเคราะห์ข้อมูลจาก โปรแกรมวิเคราะห์วีดีโอหรือภาพเคลื่อนไหวจึงเริ่มเข้ามามีบทบาทในการเรียนการสอนฟิสิกส์มากขึ้นและเป็นทางเลือกหนึ่งสำหรับการทำการทดลองด้านฟิสิกส์ศึกษาที่ทำให้ผู้เรียนสามารถเข้าใจหลักการฟิสิกส์ผ่านวีดีโอการทดลอง [2,3] โปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลภาพถ่ายวีดีโอ เช่น โปรแกรม Logger Pro 3[4], Videopoint[5] และ Tracker ผู้ทดลองทำการบันทึกวีดีโอการทดลอง และนำวีดีโอ (ข้อมูลดิบ) ที่ได้ไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมข้างต้น และโปรแกรมจะช่วยให้ผู้ทดลองดึงปริมาณที่ต้องการศึกษาจากวีดีโอ ยกตัวอย่างเช่น การวิเคราะห์การตกของวัตถุในอากาศและของไหล [6] การวิเคราะห์การกลิ้งของวัตถุทรงกระบอกบนพื้นเอียง [7] ในงานนี้เราสร้างชุดทดลองขึ้นจากวัสดุที่หาได้ง่าย ราคาไม่สูง และใช้โปรแกรม Tracker ซึ่งเป็น Freeware ที่มีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง [8] โดยเราจะทำการทดลองเพื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของจานหมุน แบบ One-stop (เบ็ดเสร็จใน Tracker) ผลการทดลองที่ได้จะดีหรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับภาพในวีดีโอ ดังนั้นการออกแบบชุดทดลองเพื่อการบันทึกวีดีโอจึงเป็นส่วนที่สำคัญ โดยปัจจัยพื้นฐานที่สำคัญ ประกอบด้วย



(ก) (ข)

รูปที่ 1 (ก) แบบชุดทดลอง (ข) ส่วนประกอบของชุดทดลอง

แผ่นอะคริลิค ความหนา 1.0 เซนติเมตร ตัดเป็นวงกลมเส้นผ่านศูนย์กลาง 14 เซนติเมตร เจาะรูที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 1.3 เซนติเมตร ตรงกลางเพื่อให้ตลับลูกปืนและใช้เพลาเส้นผ่านศูนย์กลาง 0.5 เซนติเมตร ยึดติดกับฐานดังรูป (ก) การหมุนของจานหมุนถูกบันทึกวีดีโอและการหมุนที่บันทึกไว้ถูกวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม Tracker 4.87 โดยมาร์คเกอร์ที่ใช้จะเป็นแผ่นวงกลมสีน้ำเงิน (Marker) บนแผ่นจานหมุน การจัดอุปกรณ์การทดลองและตำแหน่งกล้องบันทึกวีดีโอ แสดงในรูปที่ 2

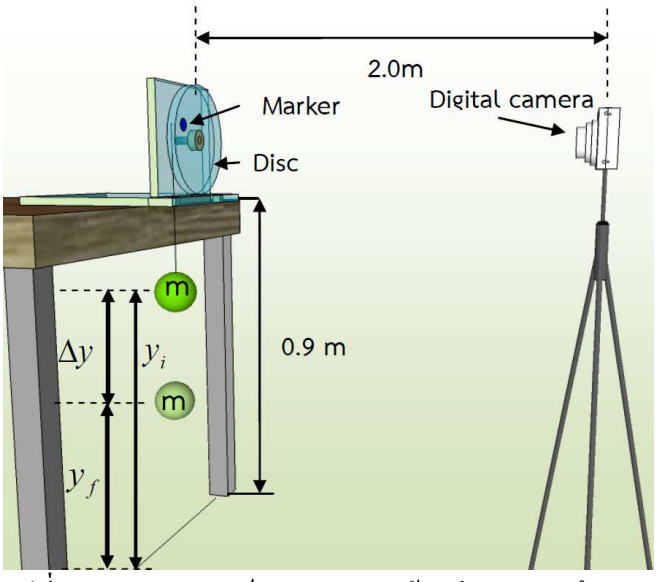
[1] อาจารย์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์

[2] นักศึกษา สาขาวิทยาศาสตร์เชิงคำนวณ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์

[3] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ (ดร.) สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์

- มาร์คเกอร์ (Marker) ต้องชัดเจน เพื่อให้โปรแกรมสามารถตรวจจับได้
- จำนวนพิกเซลของวีดีโอต่อเมตร (Pixel/m) ซึ่งจะกำหนดค่าความผิดพลาดของระยะทางในการทดลอง
- จำนวนภาพต่อวินาที (Frame rate) ซึ่งจะกำหนดค่าความผิดพลาดของเวลาในการทดลอง

ชุดทดลองที่ใช้ในงานนี้ แสดงในรูปที่ 1 (ก) และ (ข)



รูปที่ 2 การจัดอุปกรณ์การทดลองกล้องถ่ายรูปบันทึกภาพเคลื่อนไหวด้วยอัตรา 30 เฟรมต่อวินาที ที่ระยะห่าง 2 เมตร จากชุดทดลอง

ทฤษฎีบทงาน-พลังงาน (Work-Energy Theorem) ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์หาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของจานหมุน โดยพิจารณางานที่เกิดจากแรงไม่อนุรักษ์ (Non-conservative force) [9] ร่วมด้วย

กฎอนุรักษ์พลังงาน เราใช้ทฤษฎีงาน-พลังงาน ในการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นจานหมุนโดยพลังงานของระบบจะลดลงในระหว่างเกิดการหมุนได้แสดงในรูปที่ 2 ใช้กฎอนุรักษ์พลังงานเขียนสมการที่สอดคล้องกับการทดลองได้ดังนี้

$$\Delta E_p + \Delta E_k^{tr} + \Delta E_k^{r} + \Delta W_f = 0$$

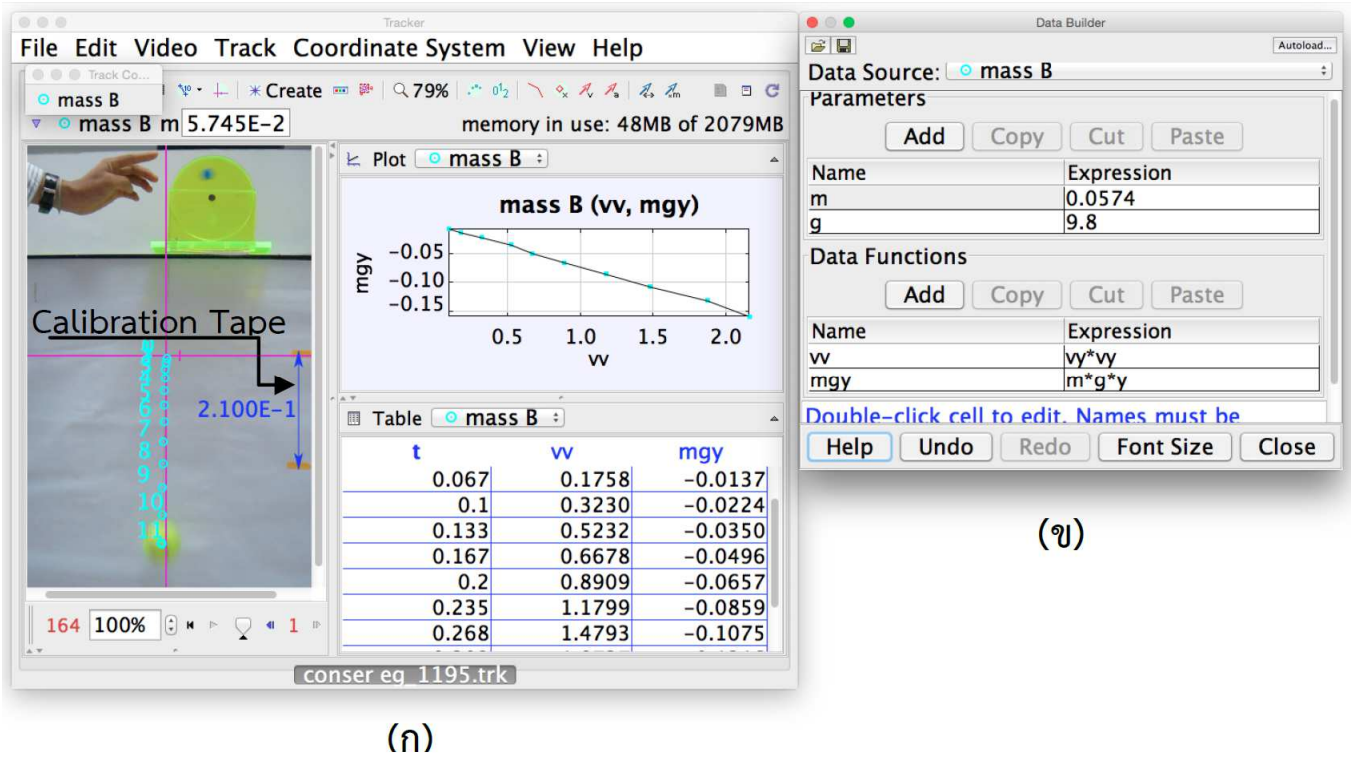
$$mg\Delta y + \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\Delta v^2 + \Delta W_f = 0 \qquad (1)$$

ΔE คือการเปลี่ยนแปลงพลังงานของระบบ ตัวห้อย p และ k บอกถึงพลังงานศักย์โน้มถ่วงและพลังงานจลน์ตามลำดับ ตัวยก tr และ r แทน คือการเลื่อนตำแหน่งและการหมุนตามลำดับ $\Delta y = y - y_i$ คือการกระจัดระหว่างสองตำแหน่งดังรูปที่ 2 Δv^2 แทน $v^2 - v_i^2$ กำหนดให้ v คือความเร็วตำแหน่งใดๆ และ v_i คือความเร็วที่ตำแหน่งเริ่มต้น m คือมวลของลูกเทนนิส ΔW_f แทนงานรวมเนื่องจากแรงเสียดทาน ในการทดลองเพื่อวิเคราะห์ด้วยทฤษฎีงาน – พลังงาน จะใช้ลูกเทนนิส แขวนไว้ด้วยเชือกเบากับขอบของจานหมุนดังรูปที่ 2 บันทึกวีดีโอการเคลื่อนที่ของลูกเทนนิสด้วยกล้องดิจิตัล และวิเคราะห์วีดีโอโดยโปรแกรม Tracker เริ่มต้นการวิเคราะห์ด้วยการกำหนดแกนอ้างอิง x-y มีจุดกำเนิด (0,0) อยู่ที่ตำแหน่งเริ่มต้น y_i ทำการเทียบระยะจริงกับระยะในวีดีโอใช้คำสั่ง Calibration Tape ในรูปที่ 3 (ก) วีดีโอการทดลองมีขนาดประมาณ 1.28 พิกเซลต่อมิลลิเมตร และเลือกคำสั่ง Autotracker เพื่อตรวจจับตำแหน่งของลูกเทนนิสอัตโนมัติ โปรแกรม Tracker จะให้ค่าตำแหน่งกับเวลา จากสมการที่ (1) จัดรูปใหม่จะได้

$$mg\Delta y = -\frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\Delta v^2 - \Delta W_f \qquad (2)$$

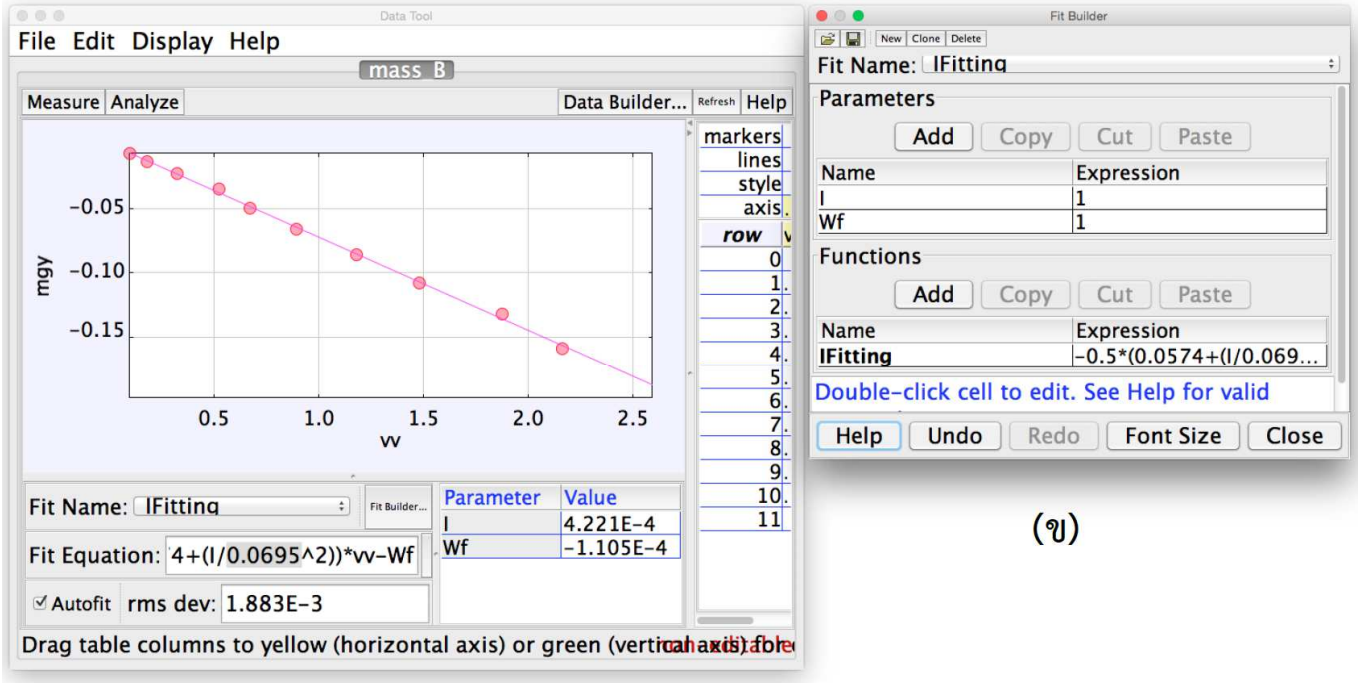
ตามสมการที่ (2) ต้องการเขียนกราฟระหว่าง $mg\Delta y$ กับ Δv^2 สามารถทำได้โดยกำหนดค่ามาขึ้นใหม่เลือกคำสั่ง Define เพื่อกำหนด Parameters และ Data Functions ได้ตามต้องการดังแสดงในรูปที่ 3 (ข) เลือกให้ Tracker แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $mg\Delta y$ และ Δv^2 ดังแสดงในรูปที่ 3 (ก)

ทำการวิเคราะห์เพื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นจานหมุนโดยใช้สมการที่ (2) โดยเลือกคำสั่ง Analyze โปรแกรมจะแสดงผลดังรูปที่ 4 (ก) กำหนดให้ I และ W_f เป็น Parameters ที่ต้องการหาค่า และเขียนฟังก์ชัน $-0.5\left(m + I/r^2\right)\Delta v^2 - \Delta W_f$ ลงในช่อง Expression เป็นฟังก์ชันโมเดลในการ Fit หาค่า Parameters ที่ต้องการดังรูปที่ 4 (ข) ในการทดลอง m คือมวลของลูกเทนนิส 57.4 กรัม r คือรัศมีของแผ่นจานหมุน 69.5 มิลลิเมตร เลือกคำสั่ง Autofit จากการทดลองทำให้ได้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อย I เท่ากับ $4.22\times10^{-4}\,kg\cdot m^2$ และได้ค่า W_f เท่ากับ $1.11\times10^{-4}\,J$ ดังรูปที่ 4 (ก)



(ก) (ข)

รูปที่ 3 (ก) วิเคราะห์ผลการทดลองโดยโปรแกรม Tracker ตรวจจับการหมุนของจุดสัญลักษณ์สีน้ำเงินหมุนรอบจุดกำเนิด x-y โดยใช้ทฤษฎีงาน-พลังงาน (ข) การกำหนด Parameters และ Data Functions (mgy คือค่า $mg\Delta y$ โปรแกรมไม่สามารถใส่เครื่องหมาย Δ ได้ vv คือค่า Δv^2 และไม่สามารถใส่หน่วยของปริมาณได้)



(ก) (ข)

รูปที่ 4 (ก) หน้าต่างกราฟผลการทดลอง (ข) การเพิ่มฟังก์ชันที่ใช้ในวิเคราะห์ผลการทดลอง

ผลการศึกษา

จากการทดลองหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นจานหมุนแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตั้งฉากกับระนาบของจานหมุน วิเคราะห์ผลการทดลองโดยใช้ทฤษฎีงาน-พลังงาน ด้วยโปรแกรม Tracker ได้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นจากหมุน $4.221\times10^{-4} kg\cdot m^2$ เทียบกับค่าที่ได้จากการคำนวณตามทฤษฎี 0.12% และงานรวมที่ระบบสูญเสียไปกับแรงเสียดทานรวม $1.105\times10^{-4} J$ คิดเป็น0.05% ของการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์โน้มถ่วง จะเห็นได้ว่าจากรูปแบบชุดทดลองที่ไม่มีความซับซ้อน สร้างจากวัสดุที่หาได้ง่าย ราคาถูก สามารถสร้างได้ด้วยตนเองให้ผลการทดลองที่น่าเชื่อถือ [10] ชุดทดลองนี้สามรถนำไปใช้รายวิชาปฏิบัติการฟิสิกส์พื้นฐาน เพื่อเสริมสร้างความเข้าใจเรื่องการหมุนของวัตถุแข็งเกร็งและยังเชื่อมโยงกับเรื่องอื่นๆ ในฟิสิกส์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ และยังสร้างความสนใจให้กับผู้เรียนเนื่องจากเป็นเทคนิคใหม่ได้อย่างดี

การใช้เทคนิคการวิเคราะห์ปริมาณทางฟิสิกส์จากภาพถ่ายวีดีโอด้วยโปรแกรม Tracker สามารถทำได้ง่าย เนื่องจากการบันทึกภาพถ่ายและวีดีโอในปัจจุบันสามารถทำได้โดยใช้โทรศัพท์มือถือ และโปรแกรม Tracker ซึ่งเป็น freeware สามารถวิเคราะห์ปริมาณต่างๆ หรือจะกำหนดประมาณขึ้นมาใหม่ก็สามารถทำได้ง่ายเพียงแค่ใส่ฟังก์ชันที่ต้องการ การวิเคราะห์ภาพถ่ายและวีดีโอด้วยโปรแกรม Tracker จึงเป็นอีกหนึ่งจากเลือกที่จะทำให้เราเรียนรู้ฟิสิกส์ได้ด้วยตนเอง

เอกสารอ้างอิง

[1] Pasco, Rotary Motion Sensor Manual CI-6538, Model No.PS-2120A.

[2] D. Brown and A. J. Cox, “Innovative uses of video analysis” Phys. Teach. 47, 145–50 (2009).

[3] P. Laws and H. Pfister, “Using digital video analysis in introductory mechanics projects” Phys. Teach. 36, 282–87 (1998).

[4] Logger Pro 3 software by Vernier Software and Technology, Beaverton, (http://www.vernier.com).

[5] Videopoint motion analysis software by Lenox Soft works, 114 Main St., Lenox, MA 01201

[6] C. Sirisathitkul, P. Glawtanong, T. Eadkong, Y. Sirisathitkul. “Digital video analysis of falling objects in air and liquid using Tracker” Rev. Bras. Ensino Fís. 35,1504-6 (2013).

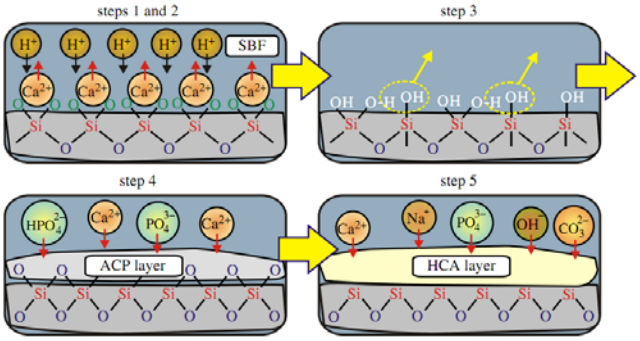
[7] S. Phommarach, P. Wattanakasiwich and I. Johnston. “Video analysis of rolling Cylinders” Phys. Educ. 47, 189-195. (2012).

[8] Tracker video analysis software by Douglas Brown (http://www.cabrillo.edu/~dbrown/ tracker/).

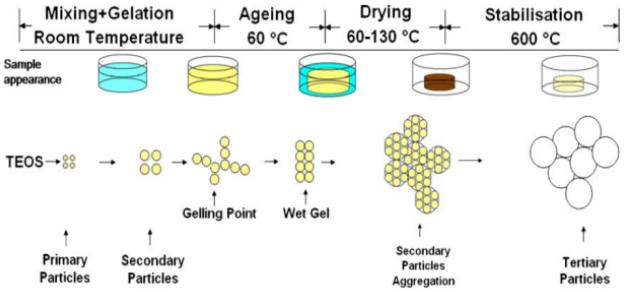
[9] R.A. Serway and R.J. Beichner, Physics for Scientist and Engineers with Modern Physics, 5th Ed., 218-31, Saunders College Publishing (2000).

[10] T. Eadkhong, R. Rajsadorn, P. Jannual and S Danworaphong, “Rotational dynamics with Tracker” Eur. J. Phys. 33, 615-22 (2012).

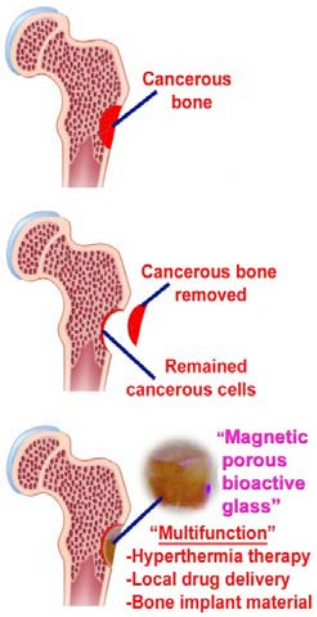
รูปประกอบจากบทความ “อนุภาคนาโนแม่เหล็กกับแก้วชีวภาพแบบรูพรุนฯ” หน้า 15 – 21



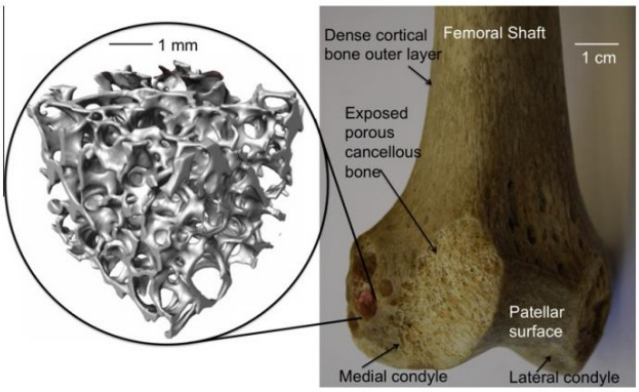
รูปที่ 2



รูปที่ 3

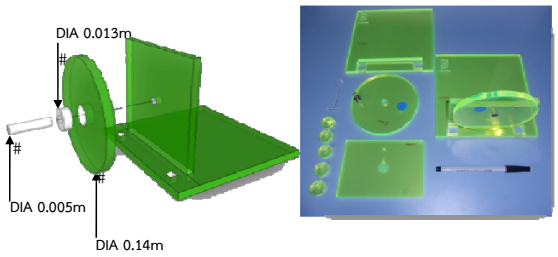


รูปที่ 9

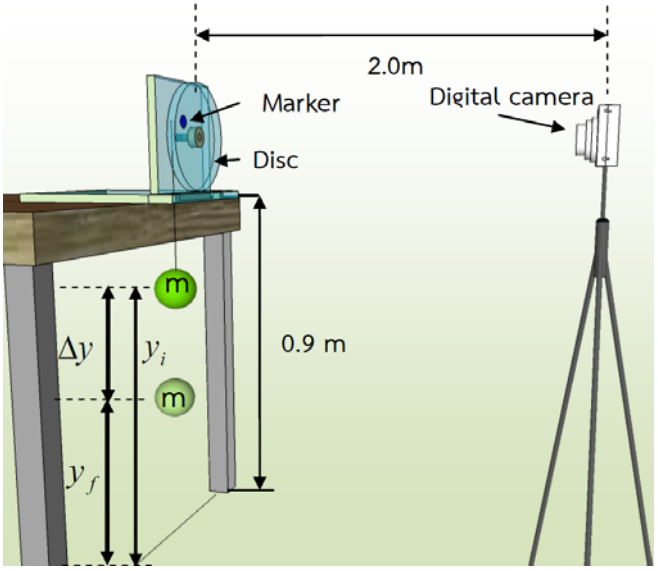


รูปที่ 4

รูปประกอบจากบทความ “การหาโมเมนต์ความเฉื่อยของจานหมุนด้วย Tracker” หน้า 29-32



รูปที่ 1



รูปที่ 2

Siam Physics Congress 2015, Centennial of General Relativity and 80th year of Thai Physics graduate

Sofitel, Krabi, Thailand, 20-22 May 2015 website: http://www.spc2015.org

สมาคมฟิสิกส์ไทย

สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

111 ถนนมหาวิทยาลัย

ต. สุรนารี อ. เมือง

จ. นครราชสีมา 30000

THAI PHYSICS SOCIETY

School of Physics, Suranaree Univ. of Technology

111 University Avenue

Tambon Suranaree, Muang District

Nakhon Ratchasima 30000

ชำระค่าฝากส่งเป็นรายเดือน

ใบอนุญาตเลขที่ 187/2552

ปท.จ. นครราชสีมา

สิ่งตีพิมพ์

หากไม่ถึงผู้รับ โปรดส่งคืนสมาคมฟิสิกส์ไทย