The String Method for Computing the Minimum Energy Paths (MEPs)

เพชร ขุนเพชร[1]

The string method เป็นวิธีเชิงตัวเลขเพื่อใช้คำนวณหา reaction paths หรือ minimum energy paths (MEPs) สำหรับเหตุการณ์ที่ระบบมีกำแพงพลังงาน (energy barrier) ขวางกั้น โดยทั่วไป string method มี 2 รูปแบบ คือ 1. zero-temperature string method ซึ่งใช้คำนวณหา MEPs สำหรับ smooth energy landscapes และ 2. finite-temperature string method สำหรับกรณีของ rough energy landscapes

วิธีเชิงตัวเลขหลายวิธีได้ถูกนำเสนอขึ้นมาเพื่อที่จะใช้คำนวณหา minimum energy paths [1-3] วิธีการที่อาจจะกล่าวได้ว่าประสบความสำเร็จมากที่สุดคือ nudged elastic band (NEB) [4] และ (zero-temperature) string method [3] สำหรับในบทความชิ้นนี้ผู้เขียนจะขอนำเสนอแนวคิดของ string method ซึ่งได้ถูกเสนอไว้โดย E *et al.* [5] ซึ่งถูกพัฒนาต่อเนื่องมาจากงานใน [3] เพื่อที่จะคำนวณหา MEPs สำหรับ smooth energy landscape และตัวอย่าง MEPs บน smooth energy landscapes ที่ผู้เขียนได้ลองคำนวณไว้ตามตัวอย่างและวิธีการตามที่ใช้ใน [5]

พลศาสตร์ของสตริง

แนวคิดพื้นฐานของ string method คือการเลื่อนสตริง (ซึ่งหมายถึงเส้นโค้งใน configuration space) ในแนวตั้งฉากกับ energy surface วิธีการนี้จะหา MEPs โดยกระบวนการสองขั้นตอนคือการวิวัฒน์จุดบนสตริงเริ่มต้น โดยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขคือระเบียบวิธีออยเลอร์หรือรุงเง-คุตตา เป็นต้น และการเชื่อมต่อจุดของสตริง

พิจารณาระบบซึ่งสามารถบรรยายได้โดย Langevin dynamics

$$\gamma \frac{dq}{dt} = -\nabla V(q) + \xi(t), \qquad (1)$$

โดยที่ γ คือสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน และ ξ คือ Gaussian white noise ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และสอดคล้องกับทฤษฎีบท Fluctuation-Dissipation

$$\left\langle \xi_j(t)\xi_k(0)\right\rangle = 2\gamma k_B T \delta_{jk}\delta(t),$$

โดยที่ <…> หมายถึงการเฉลี่ยบนออมซอมเบิลของ noises สถานะ metastables ของระบบจะอยู่รอบๆค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์ V และ MEP คือเส้นทางการเปลี่ยนสถานะที่เป็นไปได้มากที่สุดสำหรับสมการที่ (1)

สมมติให้พลังงานศักย์ V มีสถานะต่ำสุดอย่างน้อย 2 สถานะคือ A และ B เราต้องการที่จะหา MEP ซึ่งเชื่อมต่อระหว่างสองสถานะนี้ ให้ ψ เป็นเส้นทาง (path) หรือสตริง (ในที่นี้) ซึ่งเชื่อมระหว่างสถานะ A และ B (A, B สามารถที่จะพิจารณาเป็นสถานะตั้งต้นและสถานะสุดท้ายใน configuration space ตามลำดับ) เงื่อนไขที่ ψ จะเป็น MEP คือผลคูณระหว่างψ กับแรงในทิศทางที่ตั้งฉากกับ ψ มีค่าเป็นศูนย์ กล่าวคือ

$$0 = -(\nabla V)^{\perp}(\psi), \qquad (2)$$

โดยที่ $(...)^{\perp}$ หมายถึงภาพฉาย (projection) ของ (...) ลงบนระนาบซึ่งตั้งฉากกับ ψ วิธีการของ string method คือการวิวัฒน์สตริงในแนวตั้งฉากกับพื้นผิวพลังงานดังสมการ

$$u_n = -(\nabla V)^{\perp}(\psi), \qquad (3)$$

โดยที่ u_n คือความเร็วในแนวตั้งฉากของสตริง ดังนั้นเราสามารถที่จะเห็นได้ว่าสมการที่ (2) คือ stationary state ของการวิวัฒน์สตริงตามสมการที่ (3)

[1]นักศึกษาปริญญาเอก ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยโทโฮคุ

ในลำดับถัดไปเราจะทำการเขียนสมการที่ (3) เสียใหม่เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณเชิงตัวเลข เราสมมติให้สตริงถูกพาราเมไตรซ์โดยที่ ψ: $\psi = \{\varphi(\alpha), \alpha \in [0,1]\}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{\tau}$ ในแนวเส้นสัมผัสกับสตริงสามารถที่จะเขียนได้เป็น $\hat{\tau}(\alpha) = \varphi_\alpha / |\varphi_\alpha|$ โดยที่ φ_α หมายถึงอนุพันธ์ของ φ เทียบกับ α วิธีการพาราเมไตรซ์ที่ง่ายที่สุดคือการพาราเมไตรซ์ให้ความยาวของส่วนโค้งย่อยมีค่าเท่ากันซึ่งจะทำให้อนุพันธ์ของ φ เทียบกับ α มีค่าคงตัว ภายใต้การพาราเมไตรซ์นี้สมการที่ (3) สามารถที่จะเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -(\nabla V)^{\perp}(\varphi) + \lambda \hat{\tau}, \qquad (4)$$

โดยที่ $\lambda\hat{\tau} = \lambda(\alpha,t)\,\hat{\tau}(\alpha,t)$ คือตัวคูณลากรานจ์ซึ่งใส่เข้าไปเพื่อที่จะบังคับการพาราเมไตรซ์สตริง (ในที่นี้คือความยาวของส่วนโค้งย่อยซึ่งถูกนอมัลไลซ์) ตัวคูณลากรานจ์ที่ใส่เข้าไปนี้จะไม่ส่งผลต่อการวิวัฒน์สตริง เนื่องจากสตริงจะถูกวิวัฒน์ในแนวตั้งฉากเท่านั้น แต่จะส่งผลต่อการพาราเมไตรซ์สตริงและการเชื่อมต่อจุด ความยากของสมการที่ (4) คือการคำนวณแรงในทิศทางที่ตั้งฉากกับ φ เมื่อจะข้ามจุดอานม้าเราจะต้องคำนวณเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวเส้นสัมผัสกับสตริงก่อนและหลังข้ามจุดอานม้า กระบวนการนี้จะไปลดความแม่นยำของกระบวนการทั้งหมด (ผู้อ่านที่สนใจในประเด็นความเสถียรเชิงตัวเลข (numerical stability) นี้สามารถที่จะศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [3, 6, 7]) เพื่อที่จะลดความไม่แม่นยำนี้เราจะแทนที่แรงในทิศทางที่ตั้งฉากกับ φ ในสมการที่ (4) ด้วยแรงซึ่งประกอบด้วยแรงในทิศทางที่ตั้งฉากและขนานกับ φ กล่าวคือ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -(\nabla V)(\varphi) + \bar{\lambda}\hat{\tau}, \qquad (5)$$

โดยที่

$$\bar{\lambda} = \lambda + ((\nabla V)(\varphi), \hat{\tau}) \qquad (6)$$

เมื่อ (.,.) คือผลคูณภายใน ณ ตอนนี้เราได้โมเดลที่เหมาะสมสำหรับการคำนวณเชิงตัวเลขเป็นที่เรียบร้อยแล้ว

ในกระบวนการหา MEP ด้วยวิธีการ string method จะประกอบด้วย 2 ขั้นตอนหลักคือ

1. การวิวัฒน์จุดบนสตริง

เราทำการแบ่งสตริงเริ่มต้นออกเป็นส่วนย่อยๆ โดยที่ $\varphi = \{\varphi_i(t), i = 0, 1, 2, ..., N\}$ เราวิวัฒน์จุดเหล่านี้ภายในช่วงเวลา Δt ภายใต้สมการ

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = -(\nabla V)(\varphi_i) \qquad (7)$$

ถ้าเราให้ $\varphi_i^n, i = 0, 1, 2, ..., N$ เป็นตำแหน่งของจุดบนสตริงหลังจากการทำซ้ำ n ครั้ง โดยการใช้ระเบียบวิธีออยเลอร์ เราจะได้เซตของจุดบนสตริงหลังจากผ่านขั้นตอนที่ 1 ไปคือ

$$\varphi_i^* = \varphi_i^n - (\Delta t)(\nabla V)(\varphi_i^n) \qquad (8)$$

2. การเชื่อมต่อจุดของสตริง

เราต้องการที่จะเชื่อมต่อจุด $\{\varphi_i^*\}$ ซึ่งอยู่บน nonuniform mesh $\{\alpha_i^*\}$ ให้อยู่บน uniform mesh โดยที่จำนวนจุดยังคงเท่าเดิม ซึ่งสามารถทำได้ดังนี้

(1) คำนวณความยาวของส่วนโค้งย่อยที่สอดคล้องกับ φ_i^* โดยกำหนดให้

$$s_0 = 0,$$

$$s_i = s_{i-1} + |\varphi_i^* - \varphi_{i-1}^*|, \qquad i = 1, 2, ..., N$$

และ mesh $\{\alpha_i^*\}$ ได้มาจากการนอมัลไลซ์ $\{s_i\}$ กล่าวคือ

$$\alpha_i^* = s_i / s_N$$

(2) เราใช้การเชื่อมต่อจุดเพื่อที่จะได้จุด φ_i^{n+1} บน uniform mesh $\alpha_i = i/N$ ซึ่งสามารถจะทำได้โดยใช้การเชื่อมต่อจุดแบบ cubic spline สำหรับ $\{(\alpha_i^*, \varphi_i^*), i = 0, 1, 2,\ldots, N\}$ (สำหรับท่านผู้อ่านที่สนใจวิธีการเชื่อมต่อจุดแบบ cubic spline สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ใน [8]) เมื่อคำนวณได้จุด $\{\varphi_i^{n+1}, i = 0, 1, 2,\ldots, N\}$ ออกมาแล้วเราจะกลับไปยังขั้นตอนที่ 1 และทำซ้ำไปเรื่อยๆจนกระทั่ง convergence

ตัวอย่างการใช้ string method คำนวณหา MEPs

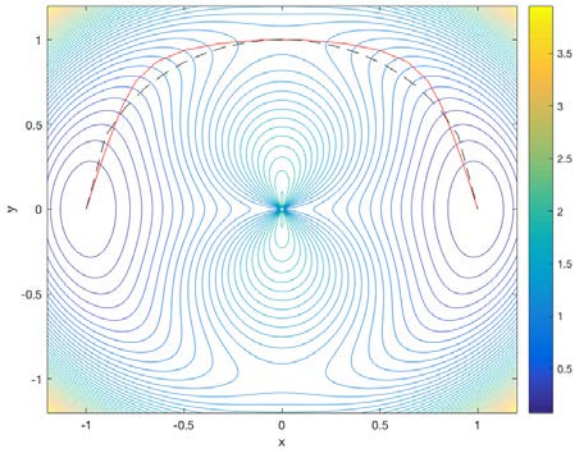
1. สำหรับตัวอย่างแรกของการใช้ string method เพื่อที่จะคำนวณหา MEP เราจะพิจารณาพลังงานศักย์ใน 2 มิติ

$$V(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^2 + y^2/(x^2 + y^2) \qquad (9)$$

Contour line ของพลังงานศักย์นี้แสดงดังรูปที่ 1 โดยมีค่าต่ำสุดอยู่ที่จุด (-1,0) และ (1,0) ตามลำดับ MEP จริงซึ่งเชื่อมต่อจุดทั้งสองนี้คือส่วนโค้งบนและล่างของวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$

ในการคำนวณหา MEP เราเลือกสตริงเริ่มต้นให้มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดที่ (1,-1) และ (0,0) ตามลำดับ เราทำการแบ่งสตริงออกเป็น $N = 20$ และใช้ระเบียบวิธีออยเลอร์ โดยที่ $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$ ในการวิวัฒน์สตริง เส้นสีแดงในรูปที่ 1 แสดง MEP ที่ได้จากการคำนวณเปรียบเทียบกับ MEP จริงซึ่งแสดงด้วยเส้นประสีดำซึ่งจะเห็นว่ามีความคลาดเคลื่อนไปพอสมควร ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นอาจจะวิเคราะห์อย่างหยาบได้ว่าเกิดจากจำนวนจุดบนสตริงที่เราเลือกใช้มีจำนวนน้อยเกินไปและ time step ที่เลือกใช้มีค่าไม่เหมาะสม

สำหรับความแม่นยำในการเชื่อมต่อจุดอันดับที่ m ค่าความคลาด เคลื่อนในการเชื่อมต่อจุดคือ



รูปที่ 1 *Contour line ของพลังงานศักย์ในสมการ (9) เส้นโค้งสีแดงแสดง MEP ที่ได้จากการคำนวณเปรียบเทียบกับ MEP จริงซึ่งแสดงด้วยเส้นประสีดำ*

Interpolation error = $O(N^{-m})$

โดยที่

$m = 4$ สำหรับวิธี cubic spline

และค่าความคลาดเคลื่อนในการวิวัฒน์จุดบนสตริงคือ

Evolution error = $O(\Delta t^{-l})$

โดยที่ $l = 2$ สำหรับระเบียบวิธีออยเลอร์

2. พลังงานศักย์แบบ Müller-Brown

พลังงานศักย์แบบ Müller-Brown มักจะถูกยกมาเป็นตัวอย่างในการทดสอบ reaction path algorithms พลังงานศักย์ชนิดนี้ประกอบไปด้วยผลบวกของสี่พจน์กล่าวคือ [9]

$$V(x, y) = \Sigma_{k=1}^{4} A_k \exp[a_k (x - x_k^0)^2 + b_k (x - x_k^0)(y - y_k^0) + c_k (y - y_k^0)^2],$$

โดยที่

$$A = (-200,\ -100,\ -170,\ 15),$$

$$a = (-1,\ -1,\ -6.5,\ 0.7),$$

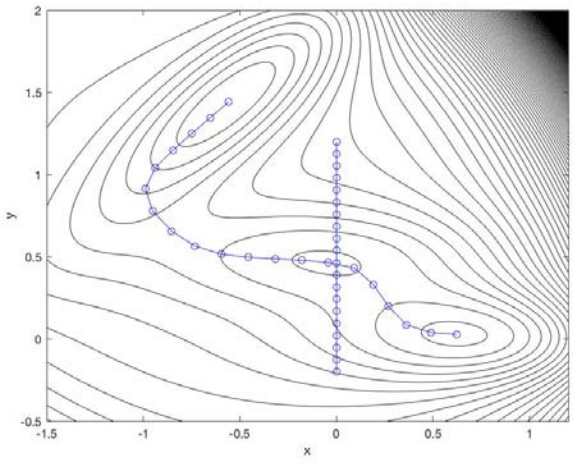
$$b = (0,\ 0,\ 11,\ 0.6),$$

$$c = (-10,\ -10,\ -6.5,\ 0.7),$$

$$x^0 = (1,\ 0,\ -0.5,\ -1),$$

$$y^0 = (0,\ 0.5,\ 1.5,\ 1)$$

พลังงานศักย์แบบ Müller-Brown มีสถานะต่ำสุดสามสถานะและมีจุดอานม้าสองจุด ในการหา MEP เราแบ่งสตริงเริ่มต้นออกเป็น $N = 20$ โดยเชื่อมระหว่างจุด (0, -0.25) และ (0, 1.25) ดังเช่นในตัวอย่างที่ 1 เราใช้ระเบียบวิธีออยเลอร์ในการวิวัฒน์จุดบนสตริงเริ่มต้นด้วย $n = 2{,}000$ สำหรับจำนวนครั้งของการทำซ้ำ รูปที่ 2 แสดงสตริงเริ่มต้นซึ่งอยู่ในแนวดิ่ง และ MEP ที่ได้จากการคำนวณ



รูปที่ 2 *สตริงเริ่มต้น (เส้นในแนวดิ่ง) และ MEP ที่ได้จากการคำนวณ (อีกเส้นที่เหลือ) บนพลังงานศักย์แบบ Mueller-Brown*

ในบทความนี้ผู้เขียนได้นำเสนอวิธีการคำนวณหา MEPs โดยการใช้ string method ตามที่ E *et al.* [5] ได้นำเสนอไว้ และพบว่าวิธีการนี้มีความแม่นยำค่อนข้างสูง อย่างไรก็ตามผู้เขียนไม่ได้กล่าวถึงรายละเอียดในการคำนวณเชิงตัวเลขและวิเคราะห์ค่าความคลาดเคลื่อนไว้ ผู้อ่านท่านใดที่มีความสนใจ จะศึกษาเพิ่มเติมสามารถสืบค้นได้ตามเอกสารอ้างอิงตามท้ายบทความนี้

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ Prof. Masao Doi และ Prof. Toshihiro Kawakatsu ที่แนะนำให้ผู้เขียนศึกษา string method สำหรับการศึกษา MEPs และขอขอบคุณทุนสนับสนุนการฝึกงานที่ Center of Soft Matter Physics and its Application, Beihang University ประเทศจีน จากโครงการ PCoMS/IPD, Institute for Material Research, Tohoku University

เอกสารอ้างอิง

[1] A. Ulitsky and R. Elber, “A new technique to calculate steepest descent paths in flexible polyatomic systems”, J. Chem. Phys. 92, 1510 (1990).

[2] R. Olender and R. Elber, “Calculation of classical trajectories with a very large time step: Formalism and numerical examples”, J. Chem. Phys. 105, 9299 (1996).

[3] W. E, W. Ren, and E. Vanden-Eijnden, “String method for the study of rare events”, Phys. Rev. B 66, 052301 (2002).

[4] H. Jónsson, G. Mills, and K. W. Jacobsen, “Classical and Quantum Dynamics in Condensed Phase Simulations”, edited by B. J. Berne, G. Ciccoti, and D. F. Coker, World Scientific, Singapore, 1998.

[5] E. Weinan, W. Ren and E. Vanden-Eijnden, “Simplified and improved string method for computing the minimum energy paths in barrier-crossing events”, J. Chem. Phys. 126, 164103 (2007).

[6] G. Henkelman and H. Jónsson, “Improved tangent estimate in the nudged elastic band method for finding minimum energy paths and saddle points”, J. Chem. Phys. 113, 9978 (2000).

[7] W. Ren, “Higher order numerical scheme in the string method for finding minimum energy paths and saddle points”, Commun. Math. Sci. 1, 377 (2003).

[8] G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, and C. B. Moler, “Computer Methods for Mathematical Computations”, Prentics-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.

[9] K. Müller and L. D. Brown, "Location of Saddle Points and Minimum Energy Paths by a Constrained Simplex Optimization Procedure," Theor. Chem. Acc. 53, 75, (1979).

การแก้ปัญหาเส้นทางเดินบนผิวโลก ในการแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ระหว่างประเทศ

อำนาจ สาธานนท์[1]

บทคัดย่อ

การแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ระหว่างประเทศครั้งที่ 6 มีข้อสอบภาคทฤษฎีข้อหนึ่งเกี่ยวกับเส้นทางเดินบนผิวโลกที่ทำให้นักเดินทางมองเห็นการเคลื่อนที่ของดาวฤกษ์เปลี่ยนไปจากปกติ ปัญหาข้อนี้จัดอยู่ในระดับยากที่สุด [1] แต่มีความน่าสนใจที่ท้าทายจินตนาการเป็นอย่างมาก คณะกรรมการการแข่งขันต้องการคำตอบเป็นเส้นกราฟซึ่งร่างขึ้นเพื่อแสดงเส้นทางการเคลื่อนที่แบบคร่าว ๆ และแสดงการหาความเร็วในกรณีง่าย ๆ กรณีหนึ่ง

อย่างไรก็ตามในการแข่งขันไม่มีผู้เข้าแข่งขันคนใดที่สามารถทำข้อนี้ได้อย่างสมบูรณ์ คำตอบของปัญหานี้ยังค่อนข้างคลุมเครือ และมีประเด็นให้ถกเถียงกัน เนื่องจากยังไม่มีวิธีการแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบเชิงวิเคราะห์ (analytic solution) ในเชิงปริมาณ (quantitative) ได้อย่างชัดแจ้ง แม้จนกระทั่งบัดนี้ ในหนังสือซึ่งรวบรวมคำถามพร้อมวิธีทำและคำเฉลยที่ยอมรับอย่างเป็นทางการของคณะกรรมการจัดการแข่งขัน [1], [2] ก็ยังไม่ปรากฏการวิเคราะห์ในรูปแบบนี้ให้เห็น

บทความนี้จะอธิบายลักษณะเฉพาะและความน่าสนใจของคำถามข้อนี้ พร้อมอธิบายเฉลยที่คณะกรรมการใช้ในการตรวจในระหว่างการแข่งขัน ความยุ่งยากในหาคำตอบที่ทำให้มีประเด็นขัดแย้ง และในส่วนท้ายจะนำเสนอการแก้ปัญหานี้โดยใช้เมตริกซ์การหมุน ซึ่งเป็นวิธีการแก้ปัญหานี้อย่างที่เป็นธรรมชาติกว่า พร้อมผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่สามารถใช้ได้ในกรณีทั่วไป ซึ่งทำให้เห็นถึงความไม่สมบูรณ์ของผลเฉลยที่ใช้ในการแข่งขันว่าเป็นจริงเฉพาะในกรณีที่ง่ายที่สุดเท่านั้น ซึ่งน่าจะเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจปัญหาลักษณะคล้ายกันนี้ต่อไป

การแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และดาราฟิสิกส์ระหว่างประเทศ

การแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และดาราฟิสิกส์ระหว่างประเทศ (International Olympiad Astronomy and Astrophysics - IOAA) จัดขึ้นทุกปีนับตั้งแต่ปี พ.ศ. 2550 โดยประเทศไทยได้รับเกียรติจากคณะกรรมการจัดการแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ระหว่างประเทศ (IOAA international board) ให้เป็นเจ้าภาพเป็นประเทศแรก ประเทศที่เป็นสมาชิกจะหมุนเวียนกันเป็นเจ้าภาพ ในปีที่ผ่านมา (พ.ศ. 2557) ได้จัดขึ้นเป็นครั้งที่ 8 ที่เมืองซูเชียวา (Suceava) ประเทศโรมาเนีย มีทีมเข้าร่วมทั้งหมด 42 ทีมจาก 37 ประเทศ และในปีนี้กำลังจะจัดขึ้นที่เมืองเซอมารัง ประเทศอินโดนีเซียในวันที่ 26 กรกฎาคม ถึงวันที่ 4 สิงหาคม พ.ศ. 2558

ประเทศที่เข้าร่วมการแข่งขันจะจัดการคัดเลือกนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจำนวน 5 คนต่อหนึ่งทีม โดยมีครูสังเกตการณ์ 1 คน และหัวหน้าทีม 2 คน ซึ่งทำหน้าที่เป็นกรรมการร่วมพิจารณาข้อสอบพร้อมคำเฉลยก่อนการแข่งขัน แปลข้อสอบ ตรวจข้อสอบให้ลูกทีมและอุทธรณ์คะแนน (moderation) กับกรรมการกลางในกรณีที่คิดว่านักเรียนควรได้คะแนนเพิ่ม การแข่งขันประกอบด้วยข้อสอบภาคทฤษฎี (50%) ภาควิเคราะห์ข้อมูล (25%) และภาคสังเกตการณ์ (25%)

ปัญหาที่นำเสนอในบทความนี้เป็นข้อสอบภาคทฤษฎีข้อที่ 13 จากการแข่งขันครั้งที่ 6 ในปี พ.ศ. 2512 จัดขึ้นที่เมือง ริโอ เดอ จาเนโร ประเทศบราซิล เพื่อความเข้าใจปัญหานี้ขออธิบายเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุท้องฟ้าเสียก่อน

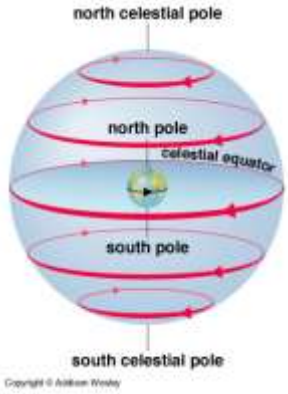
การเคลื่อนที่ของวัตถุท้องฟ้า

ดาราศาสตร์ทรงกลมใช้ระบบโลกเป็นศูนย์กลาง (geocentric system) โดยพิจารณาให้ทรงกลมท้องฟ้าเป็นภาพขยาย

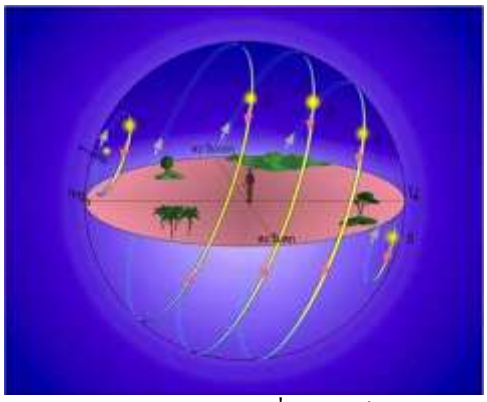
[1] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
และ รองหัวหน้าทีมตัวแทนประเทศไทยในแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ระหว่างประเทศครั้งที่ 5 ประเทศโปแลนด์

(ก) เส้นดาว [3]

ศุภฤกษ์ คฤหานนท์: Canon EOS 5D Mark2 /17-40 มม. /F4/ISO 400/ 4 ชั่วโมง 20 นาที (30 วินาที x 520 ภาพ)



(ข) การหมุนของทรงกลมท้องฟ้า



(ค) การโคจรของวัตถุท้องฟ้าที่สังเกตเห็นบนโลก [3]

รูปที่ 1 ตำแหน่งและทิศทางการหมุนของทรงกลมท้องฟ้า

ของทรงกลมโลกไปในอวกาศดังรูปที่ 1 (ข) ดาวฤกษ์และวัตถุท้องฟ้าเสมือนกับว่าติดอยู่กับทรงกลมนี้ จุดที่แกนโลก[2] ตัดกับทรงกลมท้องฟ้าเรียกว่าขั้วฟ้าเหนือ (North Celestial Pole - NCP) และขั้วฟ้าใต้ (South Celestial Pole – SCP) ซึ่งตรงกับขั้วโลกเหนือ (north pole) และขั้วโลกใต้ (south pole) ตามลำดับ เส้นศูนย์สูตรบนผิวโลกก็ขยายออกไปเป็นเส้นศูนย์สูตรฟ้า (Celestial Equator - CE)

การหมุนรอบตัวเองของโลกทำให้ผู้สังเกตมองเห็นวัตถุท้องฟ้าโคจรเป็นวงกลมรอบขั้วฟ้าทั้งสองเรียกว่า การเคลื่อนที่ประจำวัน (diurnal motion) เพราะวัตถุท้องฟ้าจะโคจรครบรอบในเวลา 1 วันดาราคติ[3]

สำหรับผู้สังเกตที่อยู่ซีกโลกเหนือ (northern hemisphere) จะเห็นดาวฤกษ์โคจรรอบขั้วฟ้าเหนือ ซึ่ง ปัจจุบันใกล้กับตำแหน่งนี้มีดาวฤกษ์ที่สว่างพอที่จะสังเกตได้ด้วยตาเปล่าดวงหนึ่งที่เรียกว่าดาวเหนือ (Polaris) ในแต่ละวันผู้สังเกตที่อยู่นิ่งบนพื้นโลกจะเห็นทรงกลมท้องฟ้าจะหมุนจากตะวันออกไปตะวันตกพาให้ดาวฤกษ์และวัตถุท้องฟ้าโคจรทวนเข็มนาฬิการอบขั้วฟ้าจากทิศตะวันออกไปทิศตะวันตก

ผู้สังเกตที่ตำแหน่งต่าง ๆ บนโลกจะเห็นดาวฤกษ์ขึ้นและตกยังทิศตะวันตกดังรูปที่ 1 (ค) และเมื่อถ่ายภาพโดยเปิดหน้า

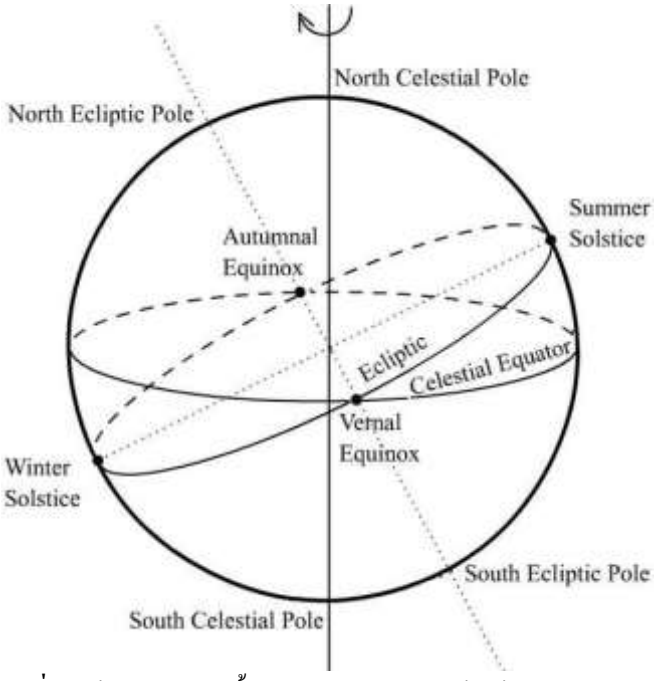
[2] แกนโลก หมายถึง แกนหมุนของโลก (earth rotational axis)

[3] วันดาราคติ (sidereal day) คือระยะเวลาที่โลกหมุนรอบตัวเองเมื่อเทียบกับจุดที่อยู่ไกลมาก ๆ ในอวกาศ ซึ่งคิดเป็นเวลาเท่ากับ 23 ชั่วโมง 56 นาที 4.09 วินาที ตามเวลาสุริยคติเฉลี่ยที่ใช้เป็นมาตรฐานเวลาทั่วไป

กล้องไว้นาน ๆ จะปรากฏเป็นเส้นดาว (star trails) ดังรูปที่ 1 (ก) โดยฝั่งขวาและซ้ายของรูปคือทิศตะวันออกและทิศตะวันตก ตามลำดับ

โลกโคจรรอบดวงอาทิตย์ในช่วงเวลาหนึ่งปี[4] ดังนั้นในช่วงเวลานี้จะสังเกตเห็นดวงอาทิตย์โคจรบนทรงกลมท้องฟ้าตามแนวเส้นสุริยวิถี (ecliptic) ดังรูปที่ 2 แกนการโคจรของดวงอาทิตย์ซึ่งตั้งฉากกับระนาบสุริยวิถีจะตัดกับทรงกลมท้องฟ้าที่ขั้วเหนือและขั้วใต้สุริยวิถี (North and South Ecliptic Poles – NEP and SEP) ขั้วเหนือสุริยวิถีเอียงทำมุม กับขั้วฟ้าเหนือ (NCP) จุดที่เส้นสุริยวิถีตัดกับเส้นศูนย์สูตรฟ้าเรียกว่าจุดวิษุวัต (equinox) สำหรับจุดตัดขณะที่ดวงอาทิตย์โคจรขึ้นจากซีกฟ้าใต้ไปยังซีกฟ้าเหนือเรียกว่า จุดวสันตวิษุวัต (vernal equnox) ส่วนจุดตัดในขณะที่ดวงอาทิตย์เคลื่อนจากซีกฟ้าเหนือลงใต้เรียกว่า จุดศารทวิษุวัต (autumnal equinox)

ขอให้สังเกตว่าเมื่อกำหนดให้ระบบพิกัดที่ใช้พิจารณาโดยให้โลกอยู่นิ่ง เราอาจพิจารณาได้ว่าทรงกลมทั้งสองเป็นทรงกลมเดียวกัน แต่ทรงกลมท้องฟ้าจะหมุนในทิศทางดังรูปที่ 2 ทำให้ตำแหน่งของขั้วและเส้นสุริยวิถีมีการเปลี่ยนตำแหน่งตลอดเวลา



รูปที่ 2 เส้นสุริยวิถีและขั้วสุริยวิถีบนทรงกลมท้องฟ้า

ปัญหาและคำเฉลย

ปัญหาที่จะนำเสนอมีใจความดังนี้

> นักดาราศาสตร์ทางซีกโลกใต้คนหนึ่งพิจารณาการขึ้นของขั้วสุริยวิถีใต้ (south ecliptic pole) แล้วเกิดความคิดว่า คงจะสนุกดีถ้าหากเห็นดาวบนท้องฟ้าหมุนวนรอบขั้วสุริยวิถีแทนที่จะเป็นขั้วฟ้า (celestial pole)
>
> จงวาดเส้นทางการเคลื่อนที่ของผู้สังเกตที่ใช้เดินทางในหนึ่งวันบนพื้นผิวโลก ที่ทำให้เห็นดาวฤกษ์ทั้งหลายโคจรรอบขั้วใต้สุริยวิถีในทิศทางและคาบเท่ากับที่โคจรรอบขั้วฟ้าใต้ และหาความเร็ว (ทั้งทิศทางและอัตราเร็ว) ในขณะที่ผู้สังเกตเดินทางผ่านเส้นศูนย์สูตรครั้งแรก

หัวใจของการหาคำตอบของปัญหานี้อยู่ว่า มีเงื่อนไขอะไรบ้างที่จะที่ทำให้ผู้สังเกตเห็นการโคจรของดาวฤกษ์ในลักษณะดังที่โจทย์กำหนด ซึ่งขอแยกเป็นสองประเด็นดังต่อไปนี้

1. ถ้าทรงกลมท้องฟ้าอยู่นิ่งเมื่อเทียบกับกรอบอ้างอิง ผู้สังเกตจะเห็นดาวฤกษ์โคจรในทิศทวนเข็มนาฬิการอบขั้วสุริยวิถี (ทั้งเหนือและใต้) เขาจะต้องเดินทางขนานกับเส้นสุริยวิถีในทิศทวนเข็มนาฬิกา เพื่อให้เห็นดาวฤกษ์โคจรรอบขั้วสุริยวิถีด้วยอัตราเดียวกับที่โคจรรอบขั้วฟ้า เขาจะต้องเคลื่อนที่รอบแกนสุริยวิถี ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω คงที่เท่ากับอัตราการหมุนของโลก ถ้าให้ T คือเวลา 1 วัน หรือ 24 ชั่วโมงดาราคติจะได้ว่า

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (1)$$

สังเกตว่าเส้นทางการเคลื่อนนี้ไม่จำเป็นต้องเป็นภาพฉาย (projection) ของสุริยวิถีซึ่งเป็นวงกลมใหญ่ (great circle) แต่อาจเป็นวงกลมเล็กที่ขนานกับเส้นนี้ขึ้นกับตำแหน่งและเวลาเริ่มต้น

ดังนั้นอัตราเร็วเชิงเส้นบนเส้นทางที่กำหนดนี้จึงขึ้นกับตำแหน่งและเวลาเริ่มต้นด้วย ถ้าให้โลกเป็นทรงกลมสมบูรณ์ที่มีรัศมีเฉลี่ย[5] R และ β_0 คือมุมที่จุดศูนย์กลางของโลกวัดจากภาพฉายของเส้นสุริยวิถีไปถึงตำบลที่เริ่มต้นเดินทางตามแนววงกลมใหญ่ที่ลากจากขั้วเหนือไปยังขั้วใต้สุริยวิถี ค่าของมุม β_0 สามารถหาได้จากตำแหน่งของผู้สังเกตและเวลาดาราคติ และความรู้เกี่ยวกับตรีโกณมิติทรงกลม อัตราเร็วเชิงเส้นของการเดินทางบนเส้นขนานนี้จะหาได้จาก

$$v_e = \omega \cdot \left(R\cos\beta_0\right) = V\cos\beta_0 \qquad (2)$$

[4] ในที่นี้หมายถึงปีฤดูกาล (tropical year) ซึ่งเท่ากับ 365 วัน 5 ชั่วโมง 48 นาที 45.14 วินาที (อ้างอิงจากปี 2010)

[5] รัศมีเฉลี่ยของโลกเท่ากับ 6371.0 กิโลเมตร

เมื่อ $V = \omega R$ คือ อัตราเร็วที่ใช้ในการเคลื่อนที่รอบเส้นศูนย์สูตรในเวลา 1 วันดาราคติ

[6] อย่างไรก็ตามจะต้องระมัดระวังในด้วยว่า เวกตอร์หนึ่งหน่วย นี้จะมีทิศเปลี่ยนไปตามละติจูดและลองจิจูดด้วย ดังนั้นการใช้ จึงเป็นกรณีเฉพาะสำหรับตำแหน่งนี้เท่านั้น

2. เนื่องจากทรงกลมท้องฟ้าหมุนรอบขั้วฟ้าดังแสดงใน **Error! Reference source not found.** เพื่อให้ผู้สังเกตมองเห็นทรงกลมท้องฟ้าอยู่นิ่ง ผู้สังเกตต้องเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω ขนานกับเส้นศูนย์สูตรโลกไปทางทิศตะวันตกเพื่อชดเชยการหมุนรอบตัวเองของโลกที่ทำให้ผู้สังเกตเห็นทรงกลมท้องฟ้าหมุนไปเมื่อเทียบกับผิวโลก จะเห็นได้ว่าอัตราเร็วเชิงเส้นตามแนวขนานกับเส้นศูนย์สูตรขึ้นกับละติจูด ϕ ของตำแหน่งเริ่มต้นบนโลกในขณะเริ่มเดิน ซึ่งเขียนได้เป็น

$$v_E = \omega \cdot (R\cos\phi) = V\cos\phi \qquad (3)$$

สมการการเคลื่อนที่ *(2)* และ (3) ค่อนข้างความซับซ้อนมาก เพราะนอกจากตำแหน่งและเวลาเริ่มต้นมีผลกับคำตอบสุดท้ายแล้ว เมื่อเปลี่ยนตำแหน่งละติจูดเนื่องจากสมการ *(2)* อัตราเร็วตามสมการที่ (3) ก็ต้องเปลี่ยนไปด้วย กล่าวคืออัตราเร็วเชิงเส้นเพื่อชดเชยการหมุนของโลกไม่เป็นอิสระจากตำแหน่งของผู้สังเกต

พิจารณาในกรณีเฉพาะเมื่อผู้สังเกตเริ่มต้นเดินทางบนเส้นศูนย์สูตรในขณะที่จุดวสันตวิษุวัตกำลังผ่านเมริเดียนที่จุดเหนือศีรษะ (zenith) ของผู้สังเกตพอดีซึ่งแสดงว่า ขณะนั้นขั้วเหนือและขั้วใต้สุริยวิถีกำลังจะตกและขึ้นจากขอบฟ้าตามลำดับ โดยเงื่อนไขนี้ $\beta_0 = 0^\circ$ และ $\phi = 0^\circ$ เมื่อแทนค่าในสมการ *(2)* และ (3) จะได้ว่า

$$v_e = v_E = V \qquad (4)$$

จากรูปที่ 2 (ก) ถ้ากำหนดให้แกน z ของระบบชี้ไปยังขั้วโลกเหนือ (ซึ่งเป็นทิศทางเดียวกับขั้วฟ้าเหนือและขนานกับแกนโลก) และแกน x ชี้ไปยังจุดวสันตวิษุวัต แกน y จะชี้ไปทางทิศตะวันออก โดยเส้นสุริยวิถีทำมุม ε กับเส้นศูนย์สูตร

ถ้ากำหนดให้ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศ $+x, +y, +z$ ตามลำดับ จะได้ว่า $\hat{e} = \cos\varepsilon \cdot \hat{j} + \sin\varepsilon \cdot \hat{k}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวเส้นสุริยวิถีในทิศที่เคลื่อนที่จากซีกโลกใต้ไปยังซีกเหนือตามโจทย์กำหนด[6] จะได้ว่า

$$\vec{v}_e = V \cdot \hat{e} = \pm V \cdot \left[\cos\varepsilon \cdot \hat{j} + \sin\varepsilon \cdot \hat{k}\right]$$
$$\vec{v}_E = -V \cdot \hat{j}$$

ดังนั้นความเร็วรวมที่ตัดกับเส้นศูนย์สูตรตามโจทย์กำหนดคือ

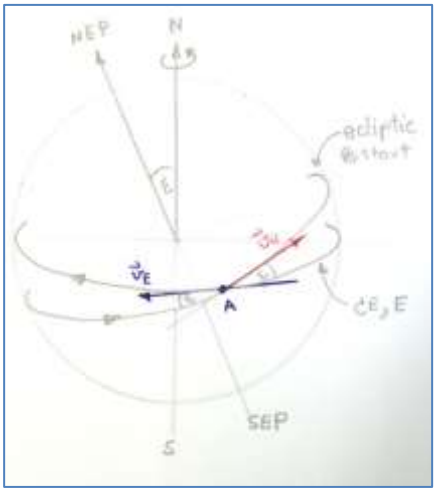
$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_\theta = V \cdot \left[(\cos\varepsilon - 1) \cdot \hat{j} + (\sin\varepsilon)\hat{k}\right] \qquad (5)$$

ถ้ากำหนดให้ a คือมุมทิศ (azimuth) ขนาดและทิศทางของความเร็วลัพธ์จึงเป็นคำตอบดังที่เขียนไว้ในเอกสารอ้างอิง [1], [2] ดังนี้

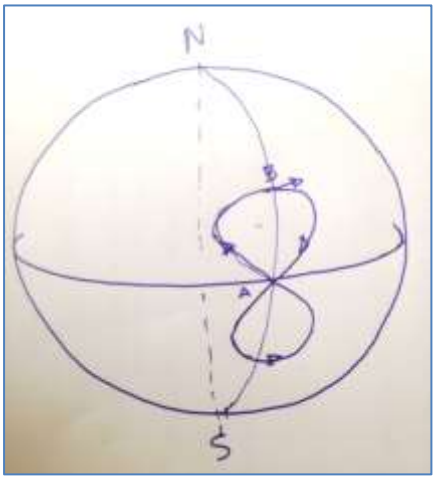
$$\begin{aligned} |\vec{v}_a|^2 &= V^2 \cdot \left[(1-\cos\varepsilon)^2 + \sin^2\varepsilon\right] \\ &= V^2 \cdot \left[2(1-\cos\varepsilon)\right] \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\cos a = \frac{\vec{v}_a}{|\vec{v}_a|} \cdot \hat{k} = \frac{\sin\varepsilon}{\sqrt{2(1-\cos\varepsilon)}}$$

$$a = 360^\circ - \arccos\left(\frac{\sin\varepsilon}{\sqrt{2(1-\cos\varepsilon)}}\right)$$



(ก) ทิศทางของอัตราเร็วที่เส้นศูนย์สูตร



(ข) เส้นทางการเคลื่อนที่ตามเฉลย IOAA

รูปที่ 2 ภาพร่างแสดงตำแหน่งเริ่มต้นและเส้นทางการเดินทาง

สำหรับเส้นทางการโคจรในกรณีเฉพาะดังกล่าวมานี้ สามารถหาได้โดยพิจารณาให้ผู้สังเกตออกเดินทางจากจุด A ดังรูปที่ 2 (ก) สังเกตว่าในขณะนี้ขั้วเหนือสุริยวิถี (NEP) และขั้วใต้สุริยคติ (SEP) อยู่ในระนาบ yz เนื่องจากโลกหมุนรอบตัวเองจากทิศตะวันตกไปยังทิศตะวันออกดังแสดงในรูป กำหนดให้ระบบพิกัดที่ใช้นี้ตรึงอยู่กับผิวโลก ทรงกลมท้องฟ้าจึงหมุนรอบตัวเองจากทิศตะวันออกไปทิศตะวันตกแทน

สังเกตว่าความเร็วลัพธ์นี้จะชี้ไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ ทั้งนี้เป็นเพราะองค์ประกอบตามแนวแกน y ความเร็ว $\bar{v}_E$ มีขนาดมากกว่าองค์ประกอบในแนวแกน y ของ $\bar{v}_e$ และจากความรู้ที่ว่าทิศทางการเคลื่อนที่ของวัตถุในขณะหนึ่งคือทิศของความเร็วลัพธ์ในขณะนั้นจะได้ว่าที่จุด A ผู้สังเกตจะเริ่มเดินทางไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือดังแสดงในรูปที่ 2 (ข)

สังเกตว่าเมื่อผู้สังเกตเคลื่อนที่ขึ้นไปทางซีกเหนือนั้นเมื่อละติจูดเพิ่มขึ้นนั้น ความเร็วในแนวขนานกับเส้นศูนย์สูตร $\bar{v}_E$ จะมีขนาดลดลงตามสมการ (3) ในขณะที่ $\bar{v}_e$ มีขนาดคงเดิมโดยที่เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{e}$ มีทิศขนานกับเส้นศูนย์สูตรมากขึ้นเรื่อย ๆ ดังนั้นที่ละติจูดหนึ่งองค์ประกอบของความเร็วในแนวขนานกับเส้นศูนย์สูตรจะหักล้างกันเป็นศูนย์ซึ่งทำให้ทิศทางของความเร็วลัพธ์วกกลับเข้าหาแนวเส้นเหนือใต้ จุดวกกลับนี้ยังไม่สามารถคำนวณหาได้ในขณะนี้เพราะเวกเตอร์ $\hat{e}$ มีขนาดเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา

เมื่อเวลาผ่านไป 6 ชั่วโมงดาราคติ ทิศของเวกเตอร์ $\bar{v}_E$ จะวกกลับมาเป็นทิศตะวันออก และแกนสุริยวิถีจะอยู่ในระนาบ xz ทำให้เวกเตอร์ $\hat{e}$ มีทิศขนานกับเส้นศูนย์สูตรไปทางตะวันออกด้วยเช่นกัน เนื่องจากองค์ประกอบของเวกเตอร์ลัพธ์ตามแนวทิศเหนือขึ้นกับ $\bar{v}_e$ เท่านั้นตำแหน่งละติจูดขณะนี้จึงเท่ากับละติจูดสูงสุดของเส้นสุริยวิถีซึ่งก็คือ ε นั่นเอง ดังนั้นที่จุด B ในรูป (ข) จึงมีละติจูดเท่ากับ ε ด้วยเช่นกัน เมื่อผ่านจุด B ไปแล้วผู้สังเกตจะต้องเดินทางเข้าหาเส้นศูนย์สูตรเนื่องจากเวกเตอร์ $\bar{v}_e$ มีองค์ประกอบตามแนวเหนือใต้เป็นลบ จนเมื่อผู้สังเกตกลับมาถึงจุด A นักเดินทางจะเดินทางกลับมาทางซีกโลกใต้อีกครั้งหนึ่ง และเมื่อพิจารณาเช่นนี้เรื่อยไป จะได้เส้นทางดังรูปที่ 2 (ข) ที่มีลักษณะคล้ายกับเลข 8 หรือเส้นแอนาเล็มมา (analemma) ดังคำเฉลยในเอกสาร [1], [2] นั่นเอง

ปัญหาของการวิเคราะห์เชิงคุณภาพ

การวิเคราะห์ดังที่กล่าวมานี้จะเห็นได้ว่าวิธีที่ใช้ในการหาคำตอบจากการแข่งขัน เป็นการวิเคราะห์เชิงคุณภาพภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นที่เฉพาะเจาะจงอย่างมาก กล่าวคือผู้สังเกตต้องออกเดินทางที่เส้นศูนย์สูตร ในเวลาที่เวลาดาราคติท้องถิ่นเป็นศูนย์พอดีเท่านั้น เพื่อให้เคลื่อนที่ตามแนวเส้นสุริยวิถีที่เคลื่อนไปตามการหมุนของโลกได้ตามต้องการ ในกรณีที่ตำแหน่งและเวลาดาราคติเริ่มต้นไม่ได้เป็นเช่นนี้การวิเคราะห์เชิงคุณภาพเช่นนี้แทบจะทำไม่ได้เลย เพราะความเร็วลัพธ์นอกจากขึ้นกับเวลายังขึ้นกับตำแหน่งอีกด้วย

ด้วยเหตุนี้จึงเกิดข้อสงสัยถึงความถูกต้องและความแม่นยำของวิธีการวิเคราะห์เช่นนี้ และถ้าหากเงื่อนไขเริ่มต้นเปลี่ยนไปแล้วเส้นทางการเดินทางจะยังคงมีลักษณะเป็นแอนาเล็มมาเช่นนี้หรือไม่

การหาคำตอบเชิงวิเคราะห์อาจทำได้โดยการหาปริพันธ์ (integrate) ของสมการการเคลื่อนที่ *(2)* และ (3) ทำได้ยากมาก แต่ถ้าการหาตำแหน่งที่เวลาต่าง ๆ อาจใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) โดยการหาปริพันธ์ของความเร็วในเวลาสั้น ๆ จนครบ 1 วันดาราคติ แต่ทั้งนี้เราก็ยังไม่อาจเชื่อมั่นได้เต็มที่ เนื่องจากการหาคำตอบด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขขึ้นกับการแบ่งช่วงเวลาให้เหมาะสม ถ้าหากคำนวณโดยข้ามจุดที่มีการเปลี่ยนแปลงทิศทางอย่างกระทันหัน รวมทั้งปัญหาการสะสมความคลาดเคลื่อน (accumulation of error) ก็จะทำให้เกิดความผิดพลาดได้เป็นอย่างมาก ด้วยเหตุนี้จึงขอนำเสนอวิธีแก้ปัญหาที่แตกต่างออกไปโดยใช้วิธีการที่เป็นธรรมชาติมากกว่าคือใช้เมตริกซ์การหมุนดังต่อไปนี้

เมตริกซ์การหมุน

ในสองมิติโดยการใช้เรขาคณิตหรือการวิเคราะห์เวกเตอร์จะพบว่า เวกเตอร์ $\bar{r} = x\cdot\hat{i} + y\cdot\hat{j}$ เมื่อหมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม θ จะได้เวกเตอร์ใหม่ $\bar{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j}$ ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

สมการเวกเตอร์ทางขวามือแสดงว่าเมื่อเราเขียนเวกเตอร์ในรูปเมตริกซ์หลัก (column matrix) เวกเตอร์ที่ได้จากการหมุนเกิดจากการนำเวกเตอร์เดิมไปคูณกับเมตริกซ์ตัวหนึ่งดังนี้

$$\bar{r}' = \mathbf{R}_z(\boldsymbol{\theta})\cdot\bar{r} \qquad (5)$$

เมตริกซ์ $\mathbf{R}_z(\boldsymbol{\theta})$ เรียกว่า เมตริกซ์การหมุน (rotational matrix) ตัวห้อยที่เขียนว่า z หมายถึงการหมุนรอบแกน และ θ คือ มุมในการหมุนจะมีค่าเป็นบวกเมื่อหมุนทวนเข็มนาฬิกา และเป็นลบเมื่อหมุนตามเข็มนาฬิกา

การหมุนรอบแกนในสามมิติก็ทำได้โดยการขยายแนวคิดนี้ เวกเตอร์ $\bar{r}$ ยังคงเขียนได้ด้วยเมตริกซ์หลักเช่นเดิมแต่มีองค์ประกอบในแนวแกน z เพิ่มขึ้นมา เนื่องจากองค์ประกอบ z' ของเวกเตอร์ใหม่ $\bar{r}'$ ยังคงเหมือนกับเวกเตอร์เดิม จะได้ว่าเมื่อหมุนเวกเตอร์ $\bar{r}$ รอบแกน z ทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม θ จะเขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

สมการที่ (5) ยังคงเป็นความจริงแม้ว่าจะเป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ในการหมุนเวกเตอร์ในทิศทวนเข็มนาฬิการอบแกน x, y, z ตามกฎมือขวา ก็ทำในลักษณะเดียวกันเมตริกซ์การหมุนรอบแกนแต่ละแกนจะเป็นตามลำดับดังนี้

$$\mathbf{R}_x(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (8)$$

$$\mathbf{R}_z(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

การหมุนแกนสามารถกระทำได้เช่นนี้ต่อเนื่องกันไปตามลำดับ ซึ่งทำได้โดยการคูณเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการหมุนเวกเตอร์หนึ่งรอบแกน x, y, z เป็นมุม α, β, γ ตามลำดับจะได้ว่า

$$\bar{r}' = \left\{\mathbf{R}_z(\boldsymbol{\gamma})\times\mathbf{R}_y(\boldsymbol{\beta})\times\mathbf{R}_x(\boldsymbol{\alpha})\right\}\cdot\bar{r} = \mathbf{R}_{xyz}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\cdot\bar{r}$$

การที่เขียนในลักษณะนี้ได้เป็นเพราะเมตริกซ์มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ (associative property) แม้ว่าจะไม่มีสมบัติการสลับที่ (commutative property) ก็ตาม

สังเกตว่าเมตริกซ์การหมุนนี้มีลักษณะเป็นธรรมชาติและเหมาะสมกับปัญหาที่กำลังพูดถึงนี้ เพราะการเคลื่อนที่บนผิวทรงกลมโลกของผู้สังเกตอาจมองได้ว่าคือการเปลี่ยนเวกเตอร์การหมุนนั่นเอง การใช้งานเมตริกซ์การหมุนสามารถใช้ได้เสมอไม่ว่าผู้สังเกตจะเคลื่อนที่ในวงกลมใหญ่ (ในที่นี้คือเส้นสุริยวิถีที่ฉายลงบนผิวโลกและเส้นศูนย์สูตร) หรือเคลื่อนที่บนเส้นขนานกับวงกลมใหญ่นี้

การหาคำตอบด้วยเมตริกซ์การหมุน

ในการแก้ปัญหานี้ขอกำหนดระบบพิกัดเทียบกับตำแหน่งบนพื้นโลก โดยถือว่าโลกอยู่นิ่งที่ศูนย์กลางของระบบพิกัด ดังนั้นทรงกลมท้องฟ้าหมุนจะตามเข็มนาฬิกาจากทิศตะวันออกไปทิศตะวันตก แกน z ขนานกับแกนโลกและชี้ไปยังทิศเดียวกับขั้วโลกเหนือ (north pole) และขั้วฟ้าเหนือ (NCP) ดังนั้นระนาบ xy จึงเป็นระนาบเดียวกันกับเส้นศูนย์สูตรโลก (equator) และเส้นศูนย์สูตรฟ้า (CE) ตามลำดับ

[7] เวลาดาราคติท้องถิ่น (local sidereal time - LST) หมายถึง มุมที่จุดศูนย์กลางของทรงกลมท้องฟ้า โดยวัดตามแนวเส้นศูนย์สูตรฟ้า (CE) ไปทางทิศตะวันตก จากเส้นเมริเดียนของผู้สังเกตยังจุดวสันตวิษุวัต นิยมใช้หน่วยเป็นชั่วโมงโดยเทียบให้ 24 ชั่วโมงเท่ากับ 360°

[8] เส้นเมริเดียนท้องถิ่น (local meridian) หมายถึง เส้นสมมุติที่ลากจากทิศเหนือผ่านจุดเหนือศีรษะของผู้สังเกต (zenith) ไปยังทิศใต้

เพื่อความสะดวกกำหนดให้รัศมีของโลกเท่ากับ 1 หน่วย และระยะทาง d ที่ใช้ในพิกัดนี้คืออัตราส่วนระหว่างระยะทางจริง D ต่อรัศมีของโลก R กล่าวคือ

$$d = \frac{D}{R} \tag{9}$$

กำหนดให้ขณะเริ่มเดินทาง $(t=0)$ แกน x ชี้ไปยังจุดวสันตวิษุวัตในขณะนั้น ซึ่งสอดคล้องกับตำแหน่งหนึ่งบนพื้นโลกที่มีลองจิจูด Θ_{ref} และละติจูด $\Phi_{ref} = 0^\circ$ และใช้เป็นตำแหน่งบนผิวโลก $(x,y,z) = (1,0,0)$ เป็นจุดอ้างอิงในการวัดมุมตามพิกัดทรงกลม $(\theta,\phi) = (0^\circ, 0^\circ)$ โดย θ,ϕ วัดตามแนวลองจิจูดและตามแนวละติจูดตามลำดับ โดยการใช้พิกัดเช่นนี้จะเห็นได้ว่าในขณะเริ่มต้นขั้วเหนือและขั้วใต้สุริยวิถีจะอยู่ที่ตำแหน่ง (ϕ,θ) คือ $(270^\circ, 90^\circ - \varepsilon)$ และ $(90^\circ, -(90^\circ - \varepsilon))$ ตามลำดับ

ถ้ากำหนดให้ผู้สังเกตเริ่มต้นเดินทางจากพิกัดภูมิศาสตร์ (Θ_0, Φ_0) ในขณะที่เวลาดาราคติท้องถิ่น[7] เท่ากับ θ_0 เมื่อเวลาผ่านไป t ผู้สังเกตจะอยู่ตำแหน่ง (Θ,Φ) ใดบนโลกเพื่อที่จะทำให้มองเห็นวัตถุท้องฟ้าเคลื่อนที่รอบขั้วสุริยวิถีตามเข็มนาฬิกาด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω ของโลกซึ่งมีคาบเท่ากับ 1 วันดาราคติเฉลี่ย ขณะเริ่มต้นเดินทางเส้นเมริเดียนท้องถิ่น[8] ของผู้สังเกตจะตรงกับเส้นลองจิจูด จากนิยามของเวลาดาราคติจะได้ว่า $\Theta_0 = \Theta_{ref} + \theta_0$ ซึ่งทำให้สามารถหาตำแหน่ง $(\Theta_{ref}, \Phi_{ref})$ ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \Theta_{ref} &= \Theta_0 - \theta_0 \\ \Phi_{ref} &= 0^\circ \end{aligned} \tag{6}$$

จะเห็นว่าตำแหน่งเริ่มต้นของการเดินทางอยู่ที่ $(\theta_0,\phi_0) = (\theta_0, \Phi_0)$ ตรงกับพิกัดฉาก (x_0, y_0, z_0) โดยที่

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos\phi_0 \cdot \cos\theta_0 \\ y_0 &= \cos\phi_0 \cdot \sin\theta_0 \\ z_0 &= \sin\phi_0 \end{aligned} \tag{7}$$

ซึ่งเป็นเวกเตอร์แสดงตำแหน่งเริ่มต้นของการเดินทางหรือ $\vec{r}_0$

ตามที่โจทย์กำหนด ถ้าทรงกลมท้องฟ้าอยู่นิ่งผู้สังเกตจะต้องเดินทางทวนเข็มนาฬิการอบแกนสุริยวิถีไปบนเส้นทางที่ขนานกับเส้นสุริยวิถีที่ฉายลงมาบนพื้นโลก ถ้าหากขั้วเหนือสุริยวิถี (NEP) อยู่ในทิศทางแกน z การเดินทางในลักษณะนี้คือการหมุนเวกเตอร์ $\vec{r}_0$ รอบแกน z เมื่อกำหนดมุมการเคลื่อนที่ $\lambda = \omega \cdot t$ จะได้ว่า

$$\vec{r}_1 = \mathbf{R_z(\lambda)} \cdot \vec{r}_0$$

แต่เนื่องจากในความเป็นจริงขั้วเหนือสุริยวิถีทำมุมเท่ากับ ε กับแกน z ในระนาบ xy ดังนั้นจะได้ว่า ตำแหน่งจะต้องหมุนเวกเตอร์นี้ไปเป็นมุม ε รอบแกน x ในทิศทวนเข็มนาฬิกาด้วย จะได้ว่าเวกเตอร์ที่แสดงตำแหน่งของผู้สังเกตรอบแกนสุริยวิถี ในกรณีที่ท้องฟ้าอยู่นิ่งเป็นดังนี้

$$\vec{r}_2 = \mathbf{R_x(\varepsilon)} \cdot \vec{r}_1 = \mathbf{R_x(\varepsilon)} \cdot \mathbf{R_z(\lambda)} \cdot \vec{r}_0$$

สังเกตว่าการหมุนจะสลับที่กันไม่ได้ เพราะจะทำให้ตำแหน่งเริ่มต้นเปลี่ยนไป

แต่เนื่องจากทรงกลมท้องฟ้าหมุนรอบแกน z ซึ่งชี้ไปยังขั้วฟ้าเหนือ (NCP) จึงทำให้ขั้วเหนือสุริยวิถี (NEP) และระนาบสุริยวิถีหมุนตามไปด้วย เมื่อเวลาเปลี่ยนไป t ขั้วเหนือสุริยวิถีจะเปลี่ยนไปเป็นมุม $\lambda = \omega \cdot t$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ซึ่งหมายความว่าจะต้องหมุนเวกเตอร์ $\vec{r}_2$ รอบแกน z ไปเป็นมุม λ ในทิศทวนเข็มนาฬิกาด้วยเช่นกันจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \mathbf{R_z(-\lambda)} \cdot \vec{r}_2 \\ &= \{\mathbf{R_z(-\lambda)} \cdot \mathbf{R_x(\varepsilon)} \cdot \mathbf{R_z(\lambda)}\} \cdot \vec{r}_0 \\ &= \mathbf{R(\lambda)} \cdot \vec{r}_0 \end{aligned} \tag{8}$$

เมื่อ $\mathbf{R(\lambda)} = \mathbf{R_z(-\lambda)} \cdot \mathbf{R_x(\varepsilon)} \cdot \mathbf{R_z(\lambda)}$ คือเวกเตอร์การหมุนรวมทั้งหมด ซึ่งเมื่อแทนเวกเตอร์การหมุนในแกนต่าง ๆ จากสมการที่ ***Error! Reference source not found.*** จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\lambda) &= \mathbf{R}_z(-\lambda) \cdot \mathbf{R}_x(\varepsilon) \cdot \mathbf{R}_z(\lambda) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\lambda + \sin^2\lambda\cos\varepsilon & (\cos\varepsilon - 1)\cdot\sin\lambda\cos\lambda & -\sin\varepsilon\sin\lambda \\ (\cos\varepsilon - 1)\cdot\sin\lambda\cos\lambda & \sin^2\lambda + \cos^2\lambda\cos\varepsilon & -\sin\varepsilon\cdot\cos\lambda \\ \sin\varepsilon\cdot\sin\lambda & \sin\varepsilon\cdot\cos\lambda & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติจะได้ว่า

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 + (\cos\varepsilon - 1)\sin^2\lambda & \frac{1}{2}(\cos\varepsilon - 1)\sin 2\lambda & -\sin\varepsilon\cdot\sin\lambda \\ \frac{1}{2}(\cos\varepsilon - 1)\sin 2\lambda & 1 + (\cos\varepsilon - 1)\cos^2\lambda & -\sin\varepsilon\cdot\cos\lambda \\ \sin\varepsilon\cdot\sin\lambda & \sin\varepsilon\cdot\cos\lambda & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \tag{9}$$

สมการ (8) และ (9) นี้คือสมการที่ใช้หาตำแหน่งของผู้สังเกต $\vec{r} = x\cdot\hat{i} + y\cdot\hat{j} + z\cdot\hat{k}$ ที่เวลาต่าง ๆ ในระบบพิกัดนี้ ซึ่งถ้าต้องการเปลี่ยนเป็นพิกัดทรงกลม (ϕ,θ) ก็จะสามารถคำนวณได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\theta = \arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ \phi = \arcsin z \tag{10}$$

และถ้าต้องการเปลี่ยนเป็นระบบพิกัดภูมิศาสตร์ (Θ,Φ) ก็ทำได้ง่าย ๆ โดยการเพียงนำตำแหน่งพิกัดภูมิศาสตร์อ้างอิง $(\Theta_{ref},\Phi_{ref})$ ที่หาได้จากสมการ (6) มาบวกกับพิกัดทรงกลม (ϕ,θ) ของเวกเตอร์ดังสมการ *(10)* ได้คือ

$$\begin{aligned}\Theta &= \Theta_{ref}+\theta\\ \Phi &= \phi\end{aligned} \tag{11}$$

จากสมการที่ (8) เราสามารถหาความเร็วของการเคลื่อนที่ที่เวลา t ต่าง ๆ ได้โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}\mathbf{R}(\boldsymbol{\lambda})\cdot\vec{r}_0\\ &= \frac{d\mathbf{R}(\boldsymbol{\lambda})}{dt}\cdot\vec{r}_0 + \mathbf{R}(\boldsymbol{\lambda})\cdot\frac{d\vec{r}_0}{dt}\end{aligned}$$

แต่เนื่องจากเวกเตอร์ $\vec{r}_0$ เป็นค่าคงที่ ดังนั้นเทอมที่สองทางขวามือจึงเป็นศูนย์ ซึ่งจะได้ว่า

$$\vec{v} = \frac{d\mathbf{R}(\boldsymbol{\lambda})}{dt}\cdot\vec{r}_0 = \left(\frac{d\mathbf{R}(\boldsymbol{\lambda})}{d\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{dt}\right)\cdot\vec{r}_0 = \omega\left(\mathbf{R'}(\boldsymbol{\lambda})\cdot\vec{r}_0\right) \tag{12}$$

จากสมการ (9) จะได้ว่า

$$\mathbf{R'}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix}(\cos\varepsilon-1)\sin 2\lambda & (\cos\varepsilon-1)\cos 2\lambda & -\sin\varepsilon\cdot\cos\lambda\\ (\cos\varepsilon-1)\cos 2\lambda & -(\cos\varepsilon-1)\sin 2\lambda & \sin\varepsilon\cdot\sin\lambda\\ \sin\varepsilon\cdot\cos\lambda & -\sin\varepsilon\cdot\sin\lambda & 0\end{bmatrix} \tag{13}$$

ถ้า ω ใช้หน่วยเป็นเรเดียนต่อชั่วโมง เมื่อต้องการแปลงเป็นความเร็วในหน่วยระยะทางเป็นกิโลเมตรต่อชั่วโมงก็เพียงแต่นำรัศมีเฉลี่ยของโลก R มาคูณดังสมการที่ **Error! Reference source not found.**

สำหรับการหาทิศทางของการเคลื่อนที่รวมทั้งองค์ประกอบของความเร็วที่ตำแหน่ง (ϕ,θ) สามารถหาได้โดยพิจารณาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวรัศมี $\hat{r}(\theta,\phi)$ ของระบบพิกัดที่ตำแหน่ง (ϕ,θ) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\hat{r}(\phi,\theta) = \begin{bmatrix}\cos\phi\cdot\cos\theta\\ \cos\phi\cdot\sin\theta\\ \sin\phi\end{bmatrix}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวตะวันออกตะวันตก $\hat{e}_\theta$ และแนวเหนือใต้ $\hat{e}_\phi$ จะหาได้จากอนุพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{e}_\theta &= \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} \rightarrow \hat{e}_\theta = \frac{\vec{e}_\theta}{|\vec{e}_\theta|} = -\sin\theta\cdot\hat{i} + \cos\cdot\theta\,\hat{j}\\ \vec{e}_\phi &= \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} \rightarrow \hat{e}_\phi = \frac{\vec{e}_\phi}{|\vec{e}_\phi|} = -\sin\phi\left(\cos\theta\cdot\hat{i} + \sin\theta\cdot\hat{j}\right) + \cos\phi\cdot\hat{k}\end{aligned} \tag{14}$$

องค์ประกอบของความเร็วตามแนวตะวันออกตะวันตก $\hat{e}_\theta$ และแนวเหนือใต้ $\hat{e}_\phi$ จึงหาได้จากผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ระหว่างเวกเตอร์ความเร็วที่ตำแหน่งนั้นดังนี้

$$v_\theta = \vec{v}\cdot\vec{e}_\theta\ ;\ v_\phi = \vec{v}\cdot\vec{e}_\phi \tag{15}$$

และมุมทิศ a ของการเคลื่อนที่ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนผิวโลกสามารถหาได้จากความสัมพันธ์ที่ว่า

$$v\cos a = \vec{v}\cdot\vec{e}_\phi = v_\phi \tag{16}$$

ผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่

เมื่อกรณีเฉพาะตามคำถามที่ให้มาจะได้ว่า ตำแหน่งเริ่มต้นที่จุด A ในรูปที่ 2 สามารถเขียนเวกเตอร์ $\vec{r}_0 = (1,0,0)$ เมื่อแทนลงในสมการ (8) โดยอาศัยเมตริกซ์การหมุนในสมการที่ (9) จะได้ว่าตำแหน่งของผู้สังเกตที่เวลา t เมื่อ $\lambda = \omega\cdot t$ เป็นดังนี้

$$\vec{r} = \begin{bmatrix}1+(\cos\varepsilon-1)\sin^2\lambda\\ \frac{1}{2}(\cos\varepsilon-1)\sin 2\lambda\\ \sin\varepsilon\cdot\sin\lambda\end{bmatrix} \tag{17}$$

ซึ่งเมื่อคำนวณตำแหน่งเมื่อเวลาเปลี่ยนไปครั้งละหนึ่งชั่วโมงดาราคติโดยใช้ภาษาเดลไฟ (Delphi) และนำข้อมูลมาพล็อตกราฟด้วยโปรแกรมออริจิน (Origin) จะเป็นดังรูปที่ 3 ซึ่งสอดคล้องกับคำเฉลยในรูปที่ 2 (ข)

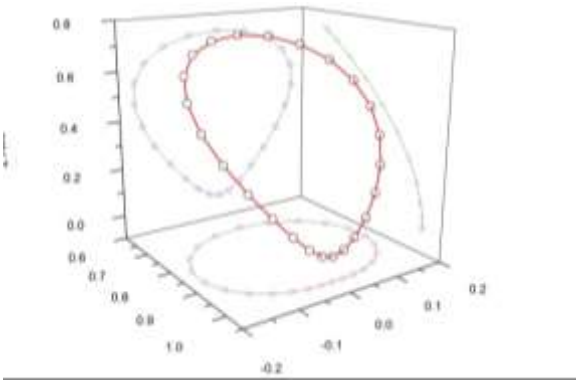
เมื่อพิจารณาความเร็วจากสมการที่ (12) เมื่อ $\vec{r}_0 = (1,0,0)$ และ $\lambda = 0$ จะได้ว่า

$$\vec{v} = \omega\begin{bmatrix}(\cos\varepsilon-1)\sin 2\lambda\\ (\cos\varepsilon-1)\cos 2\lambda\\ \sin\varepsilon\cdot\cos\lambda\end{bmatrix} = \omega\begin{bmatrix}0\\ \cos\varepsilon-1\\ \sin\varepsilon\end{bmatrix} \tag{18}$$

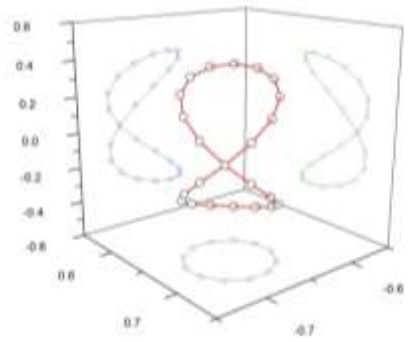
ดังนั้นซึ่งเมื่อเปลี่ยนหน่วยเป็นกิโลเมตรต่อชั่วโมง

$$R\vec{v} = R\omega\cdot\left[(\cos\varepsilon-1)\cdot\hat{j} + (\sin\varepsilon)\hat{k}\right] = V\cdot\left[(\cos\varepsilon-1)\cdot\hat{j} + (\sin\varepsilon)\hat{k}\right]$$

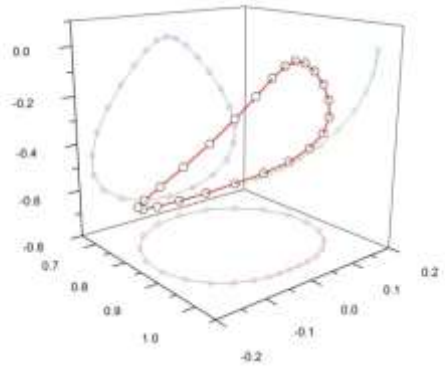
จะเห็นว่าสอดคล้องกับสมการ **Error! Reference source not found.** พอดี ซึ่งแสดงให้เห็นว่าคำตอบของวิธีการใช้เมตริกซ์การหมุนสอดคล้องกับคำตอบของการแข่งขันทุกประการ



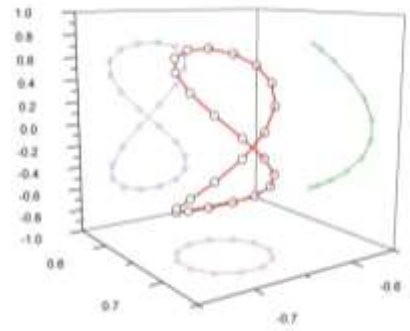
(ก) $(\theta_0,\phi_0)=(0^\circ,+\varepsilon)$



(ค) $(\theta_0,\phi_0)=(+45^\circ,0^\circ)$

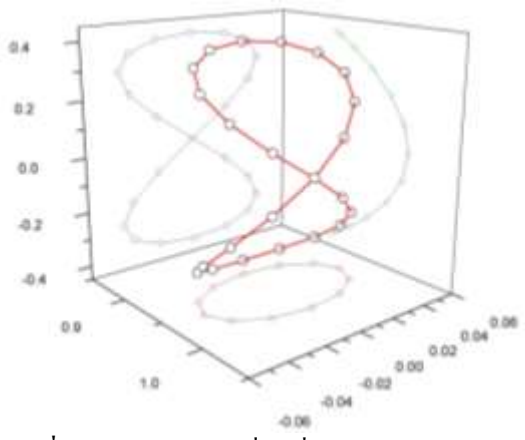


(ข) $(\theta_0,\phi_0)=(0^\circ,-\varepsilon)$



(ง) $(\theta_0,\phi_0)=(-45^\circ,0^\circ)$

รูปที่ 4 เส้นทางเดินบนผิวโลกเมื่อจุดเริ่มต้นอยู่ในแนวเหนือใต้และตะวันออกตะวันตกของจุดอ้างอิง



รูปที่ 3 เส้นทางการเคลื่อนที่ตามโจทย์ของ IOAA

จากสมการ (18) ยังสามารถทำให้หาจุดวกกลับซึ่งไม่สามารถทำได้โดยใช้การวิเคราะห์เชิงคุณภาพได้ ที่จุดวกกลับองค์ประกอบของเวกเตอร์ความเร็วตามแนวแกน y จะต้องเป็นศูนย์ ดังนั้นเมื่อ ω และ ε คงที่ $\cos 2\lambda = 0$ ซึ่งจะเป็นไปได้เมื่อ $2\lambda = m\frac{\pi}{2} \rightarrow \lambda = m\left(\frac{\pi}{4}\right)$ โดยที่ m เป็นจำนวนคี่ ซึ่งตรงกับเวลา $t = m\left(\frac{T}{8}\right)$ ซึ่งในที่นี้ตรงกับ 3, 9, 15, 21 ชั่วโมงตามลำดับสอดล้องกับรูปที่ 3 ซึ่งเมื่อแทนค่าลงในสมการ (17) จะได้ตำแหน่งที่เป็นจุดวกกลับคือ

$$\vec{r}_r\left(\lambda=\frac{m\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}\cos\varepsilon+1\\ \pm(\cos\varepsilon-1)\\ \pm\sqrt{2}\sin\varepsilon\end{bmatrix}$$

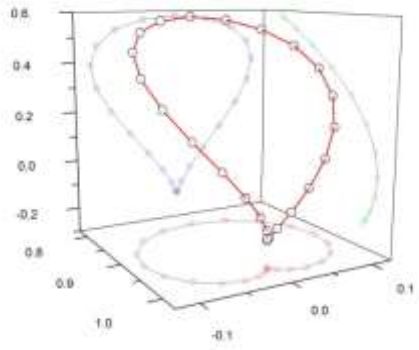
ซึ่งจากสมการ (19) จะได้ว่าจุดวกกลับอยู่ที่ละติจูด

$$\phi=\pm\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon\right)=16^\circ 20'9.84''$$

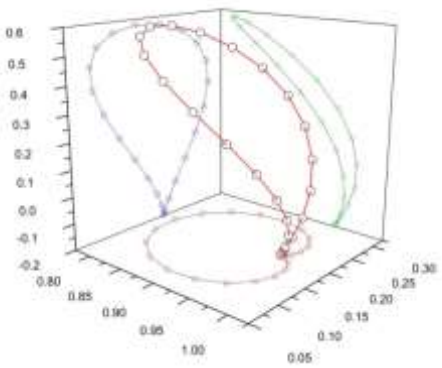
การคำนวณโดยใช้เมตริกซ์การหมุนนี้ยังแสดงให้เห็นถึงเส้นทางบนผิวโลกที่แตกต่างออกไปจากแบบแอนาเล็มมาอีกด้วย เส้นทางจะมีลักษณะเปลี่ยนไป ถ้ากำหนดให้ตำแหน่งเริ่มต้นของการเดินทางเปลี่ยนไปจากที่โจทย์กำหนดนี้ดังแสดงในรูปที่ 4 และรูปที่ 5

สรุปผลการวิเคราะห์

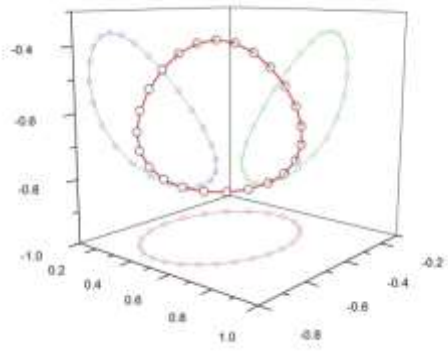
การวิเคราะห์เส้นทางการเคลื่อนที่บนผิวโลกจากปัญหาภาคทฤษฎีข้อที่ 13 ในการแข่งขันดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ระหว่างประเทศครั้งที่ 6 พบว่าการใช้เมตริกซ์การหมุนได้



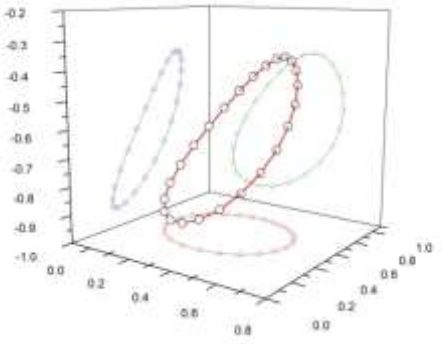
(ก) $(\theta_0,\phi_0)=(0^\circ,12^\circ)$



(ค) $(\theta_0,\phi_0)=(12^\circ,12^\circ)$



(ข) $(\theta_0,\phi_0)=(-45^\circ,-45^\circ)$



(ง) $(\theta_0,\phi_0)=(60^\circ,-45^\circ)$

รูปที่ 5 เส้นทางเดินบนผิวโลกเมื่อจุดเริ่มต้นอื่น ๆ

ให้คำตอบทั่วไปได้เป็นอย่างดี วิธีนี้นอกจากจะสามารถที่จะแก้ปัญหากรณีเฉพาะตามที่โจทย์ต้องการได้แล้ว ยังได้แสดงให้เห็นว่าตำแหน่งและและความเร็วที่เวลาต่าง ๆ ขึ้นกับตำแหน่งและเวลาเริ่มต้น ลักษณะเส้นทางบนผิวโลกไม่จำเป็นต้องเป็นรูปแอนาเล็มมาตามที่ได้เฉลยไว้แต่เพียงอย่างเดียว และยังสามารถคำนวณหาความเร็ว (ทั้งขนาดและทิศทาง) บนผิวโลกที่จุดต่าง ๆ ได้ รวมถึงจุดวกกลับในกรณีเฉพาะตามที่โจทย์กำหนดซึ่งไม่สามารถหาได้โดยการวิเคราะห์เชิงคุณภาพ

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ คณะกรรมการจัดการแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ ที่อนุญาตให้แปลและเผยแพร่ข้อสอบเป็นภาษาไทย

ขอขอบคุณ อาจารย์ ดร. สธน วิจารณ์วรรณลักษณ์ ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และหัวหน้าทีมตัวแทนประเทศไทยในการแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ระหว่างประเทศครั้งที่ 3 และครั้งที่ 6 ที่กรุณาอ่านต้นฉบับให้ความคิดเห็นที่เป็นประโยชน์กับการเขียนบทความนี้

ขอขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สรศักดิ์ ด่านวรพงศ์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ รองหัวหน้าทีมตัวแทนประเทศไทยในการแข่งขันโอลิมปิกดาราศาสตร์และฟิสิกส์ดาราศาสตร์ระหว่างประเทศครั้งที่ 8 สำหรับเอกสารอ้างอิง [1] และ [2]

เอกสารอ้างอิง

[1] Solutions: Celestial Coordinate Systems. In Aniket Sule, eds. A Problem Book in Astronomy and Astrophysics, 115-116. Suceava : Cygnus Publishing House, 2014.

[2] Sandu, Mihail. Problems 2007-2013 Solutions, Comments, Details, Extensions. translated by Mihaela Iancu. Suceava: Cygnus Publishing House, 2014.

[3] http://www.manager.co.th/Science/ViewNews.aspx?NewsID=95500000
16487

[4] http://cse.ssl.berkeley.edu/bmendez/ay10/2002/notes/lec2.html

[5] http://astroschool.science.cmu.ac.th/

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Earth

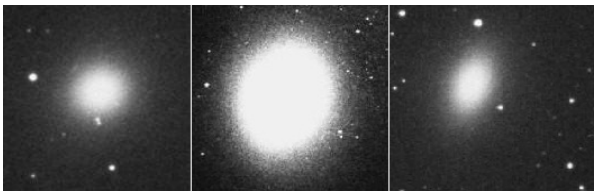
[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Octant_%28solid_geometry%29

การก่อกำเนิดดาราจักรรี: จากเอกภพสู่แบบจำลองทางฟิสิกส์

ถิรวุฒิ วรกิจพูนผล[1]

ลักษณะทั่วไปของดาราจักรรี

ดาราจักรรี (elliptical galaxy) ได้ถูกสังเกตการณ์มาเป็นเวลานาน และเป็นหนึ่งในดาราจักรชนิดหลักของลำดับฮับเบิล (Hubble sequence) ร่วมกับดาราจักรก้นหอย (spiral galaxy) ซึ่งในกลุ่มของดาราจักรรี เราสามารถจำแนกระดับของความรีที่ปรากฏบนท้องฟ้า ได้ตั้งแต่ E0 (วงกลม) จนถึง E7 (วงรี) โดยที่ จำนวนเต็ม คือตัวเลขที่ระบุความรี คำนวณจากค่าความรีของเส้นไอโซโฟต (isophote) คูณด้วยจำนวนเต็ม 10 หรืออีกนัยหนึ่ง ค่าความรีของดาราจักรสามารถบอกได้โดยอ้างอิงกับความรีของมวลส่องสว่างนั่นเอง เหตุผลที่เราไม่สามารถพบดาราจักรรีที่มีความรีมากกว่า E7 เชื่อว่า ยิ่งดาราจักรมีความรีมาก มันจะยิ่งไม่เสถียรและมันจะม้วนตัวเพื่อลดความรีของตัวมันเอง ในขณะที่ดาราจักรรีชนิด E3 เป็นชนิดที่ถูกสังเกตเห็นได้มากที่สุด ตัวอย่างของดาราจักรรี ที่มีค่าความรีต่างๆ แสดงใน รูปที่ 1



รูปที่ 1 *ดาราจักร M89 (ซ้าย), M32 (กลาง) และ NGC4621 (ขวา) ซึ่งเป็นชนิด E0, E2 และ E7 ตามลำดับ (รูปภาพโดย http://cas.sdss.org/dr6/en/proj/basic/galaxies/ellipticals.asp)*

ถึงแม้ดาราจักรรีจะถูกค้นพบได้โดยทั่วไป แต่ความเข้าใจในวิวัฒนาการของรูปร่างยังคงเป็นปริศนาสำหรับนักดาราศาสตร์จนถึงทุกวันนี้ หนึ่งในคำถามที่ยังคงรอการพิสูจน์คือค่าความสว่างของดาราจักรรีที่เป็นเอกลักษณ์เด่นชัด คือ ความส่องสว่างพื้นผิวจะลดลงตามระยะจากจุดศูนย์กลางตาม กฎของเดอโวคูเลอร์ (de Vaucouleurs' law) [1] ซึ่งกล่าวไว้ว่า ค่าลอการิธึมของความส่องสว่างของพื้นผิวจะแปรผกผันกับระยะห่างจากจุดศูนย์กลางยกกำลัง 1/4 อย่างไรก็ตาม ถึงแม้กฎนี้จะเป็นที่ยอมรับกันอย่างกว้างขวาง แต่นักดาราศาสตร์ก็ยังไม่สามารถอธิบายในเชิงทฤษฎีได้ว่าดาราจักรรีมีความส่องสว่างเป็นลักษณะนี้ได้อย่างไร คำอธิบายที่ใกล้เคียงที่สุด คือ หากความหนาแน่นของดาราจักรลดลงตามรัศมีในลักษณะที่แปรผกผันกับรัศมียกกำลัง 4 ระบบจะสามารถให้ค่าความสว่างพื้นผิวที่มีลักษณะดังที่สังเกตเห็นซึ่งการพิสูจน์ดังกล่าวเป็นเพียงการประมาณทางอ้อมโดยอิงกับการจำลองทางคอมพิวเตอร์เท่านั้น นอกจากนี้ การจำลองทางคอมพิวเตอร์มากมายแสดงให้เห็นว่า ไม่ใช่ทุกระบบที่สามารถวิวัฒนาการเข้าสู่ความหนาแน่นดังกล่าว เลขยกกำลังของความหนาแน่นเทียบกับรัศมีสามารถอยู่ในช่วง 3-4 ขึ้นกับเงื่อนไขเริ่มต้น

ในเชิงกลศาสตร์สถิติ สมดุลหลักของระบบไม่ว่าจะเป็นระบบที่อยู่ภายใต้อันตรกิริยาใดๆ คือ **สมดุลอุณหพลศาสตร์ (thermodynamic equilibrium)** ซึ่งเป็นสมดุลที่มีเอนโทรปีของโบลซ์มานน์ (Boltzmann entropy) สูงสุด ในทางดาราศาสตร์ หากพิจารณาว่าระบบดาราจักรเป็นระบบที่มีแรงดึงดูดในตัวเอง สมดุลอุณหพลศาสตร์ของระบบดังกล่าว คือ *'ทรงกลมไอโซเทอร์มอล' (isothermal sphere)* [2] ซึ่งมีลักษณะที่สำคัญ คือ ความหนาแน่นจะแปรผกผันกับรัศมีของระบบจากจุดศูนย์กลางยกกำลัง 2 แต่ในทางปฏิบัติ การจะพิสูจน์ว่าดาราจักรอยู่ในสถานะทรงกลมไอโซเทอร์มอลหรือไม่ ค่อนข้างเป็นไปได้ยาก เพราะเราไม่สามารถวัดความหนาแน่นของดาราจักรได้โดยตรง นอกจากนี้ จากที่กล่าวมาข้างต้น ระบบจากการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ให้ความหนาแน่น

[1] อาจารย์ (ดร.) คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ

ที่แปรผกผันกับรัศมีเป็นเลขยกกำลังในช่วง 3-4 ซึ่งจะชันกว่าที่ทฤษฎีทรงกลมไอโซเทอร์มอลทำนายไว้ นอกจากนี้ จากการวิเคราะห์อายุของดาราจักร ยิ่งทำให้ยิ่งชัดเจนว่า ดาราจักรไม่มีทางที่จะอยู่ในสถานะทรงกลมไอโซเทอร์มอลได้ เพราะมีอายุน้อยกว่าระยะเวลาในการลู่เข้าสู่สมดุลอุณหพลศาสตร์มาก ซึ่งระยะเวลาดังกล่าวมีค่านานกว่าอายุของเอกภพ

ทฤษฎีที่สำคัญในยุคแรก

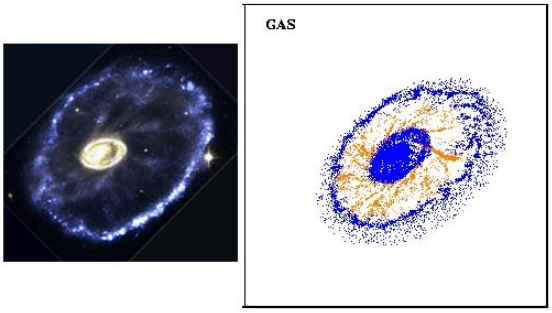
หนึ่งในทฤษฎีทางเลือกยุคแรกเริ่มที่พยายามจะอธิบายการการกระจายตัวของความสว่าง ได้ถูกเสนอโดย โดนัลด์ ลินเดน-เบลล์ (Donald Lynden-Bell) [3] ซึ่งกล่าวว่า ดาราจักรรีที่สังเกตเห็นในปัจจุบัน อยู่ใน **สถานะกึ่งหยุดนิ่ง (quasi-stationary state)** เป็นผลจากการผ่อนแบบไม่มีการชน (collisionless relaxation) ของกลุ่มแก๊สก่อนดาราจักร ซึ่งสถานะดังกล่าวเป็นสถานะคั่นกลางก่อนที่จะวิวัฒนาการต่อไปสู่สมดุลอุณหพลศาสตร์ เหตุผลที่ทฤษฎีนี้มีความเป็นไปได้ คือ อายุของสถานะดังกล่าวจากการประมาณการโดยการแกว่งกวัดของสนามศักย์ พบว่าสั้นกว่าอายุของเอกภพมาก และมีค่าน้อยกว่าอายุของดาราจักร นอกจากนี้ ลินเดน-เบลล์ ยังได้ทำนายฟังก์ชันการกระจายตัวสำหรับดาราจักรรีไว้ด้วย โดยที่ ฟังก์ชันการกระจายตัว ที่ลินเดน-เบลล์ทำนายไว้มีลักษณะคล้ายกับสถิติของเฟอร์มิ-ดิแรก เนื่องจากลินเดน-เบลล์มองว่า วิวัฒนาการของดาราจักรในช่วงแรกเป็นไปตาม หลักการกีดกันของเพาลี นั่นคือ แต่ละส่วนประกอบของดาราจักรไม่สามารถอยู่ในตำแหน่งและมีความเร็วเหมือนกันได้ และเคลื่อนที่อยู่ภายใต้สนามเฉลี่ย (mean-field) ของทั้งระบบ โดยที่อิทธิพลของสนามแรงจากอนุภาคข้างเคียงเกือบจะไม่มีผลในวิวัฒนาการ แต่จากความซับซ้อนในเงื่อนไขทางสถิติของทฤษฎีของลินเดน-เบลล์ และข้อจำกัดในการสังเกตการณ์ ทำให้การพิสูจน์ทฤษฎีของเขากับดาราจักรรีเกือบจะเป็นไปไม่ได้ อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ทฤษฎีของเขายังไม่สามารถถูกตรวจสอบจากข้อมูลเชิงปริมาณ แต่แนวคิดที่ว่าดาราจักรรีเป็นสถานะกึ่งสถิตย์ซึ่งเป็นผลจากการผ่อนแบบไม่มีการชนภายใต้สนามเฉลี่ย ยังคงได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวาง ทั้งในสาขาดาราศาสตร์ และสาขาอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง

ถึงแม้นักดาราศาสตร์ยังไม่สามารถอธิบายการกระจายความสว่างของดาราจักรรีได้อย่างละเอียด แต่ปัญหาการเกิดรูปร่างรีก็ถูกศึกษากันอย่างกว้างขวางโดยละเว้นข้อสงสัยในการกระจายตัวของความสว่างไว้ สมมุติฐานของการก่อกำเนิดรูปร่างรีแบ่งเป็นสองกลุ่มหลัก คือ

1) การชนและการรวมกันของดาราจักร

2) การยุบตัวอย่างรุนแรงของกลุ่มก๊าซเริ่มต้น

สมมุติฐานแรก จะมุ่งเน้นไปที่ดาราจักร 2 อัน (หรือมากกว่านั้น) เข้าชนกันและรวมกันเป็นดาราจักรสุดท้ายที่มีความรี จากสมมุติฐานนี้ ทำให้เกิดแบบจำลองการชนมากมาย และให้ผลลัพธ์ที่มีความรีคล้ายกับดาราจักรที่สังเกตเห็นบนท้องฟ้า เหตุผลที่มองว่าดาราจักรรีสามารถเกิดจากการชนกัน คือ การชนและรวมกันอย่างรุนแรงของดาราจักร ทำให้วงโคจรของดาวฤกษ์ในดาราจักรมีลักษณะไม่เป็นระเบียบและกระจายตัวอยู่ทุกทิศทาง ซึ่งสอดคล้องกับวงโคจรของดาวฤกษ์ในดาราจักรรีที่สังเกตเห็น ยิ่งไปกว่านั้น แบบจำลองการชนของดาราจักร สามารถจำลองการเกิดดาราจักรแปลกอีกบางอัน เช่น ดาราจักรล้อเกวียน (cartwheel galaxy) [4] ซึ่งผลจากการจำลองทางคอมพิวเตอร์สามารถเปรียบเทียบกับ การสังเกตการณ์ดังแสดงใน รูปที่ 2



***รูปที่ 2** (ซ้าย) ภาพดาราจักรล้อเกวียนที่สังเกตเห็นในปัจจุบัน (ขวา) ภาพจากการจำลองทางคอมพิวเตอร์แสดงตำแหน่งของแก๊สในระบบ (ภาพจาก Horellou & Combes, 2000 [4] หรือ http://aramis.obspm.fr/~combes)*

นอกจากนี้ การจำลองที่มีความซับซ้อนขึ้น เช่น การใส่แก๊สร้อน หรือการจำลองแบบอุทกพลศาสตร์ (hydrodynamics) หรือการหาอัลกอริธึมในการจำลองระบบที่ประหยัดเวลามากขึ้น ก็ได้มีการพัฒนาขึ้นเช่นกันเพื่อให้สอดคล้องกับสภาพของดาราจักรจริงที่มี

แก๊สร้อนเป็นส่วนประกอบ มีจำนวนดาวฤกษ์มาก และมีการก่อกำเนิดของดาวฤกษ์ภายใน อย่างไรก็ตาม ถึงแม้การศึกษาดาราจักรในแบบจำลองนี้สามารถสร้างดาราจักรที่มีความหลากหลาย แต่กรอบความเข้าใจยังคงขึ้นกับการจำลองทางคอมพิวเตอร์เป็นหลัก

สำหรับสมมุติฐานที่สอง คือ การยุบตัวของกลุ่มแก๊สก่อนดาราจักร จะมุ่งเน้นไปที่ระบบโดดเดี่ยว ที่อยู่ภายใต้แรงดึงดูดที่ไม่เสถียรกับการยุบตัว หรือในอีกความหมายหนึ่งก็คือ แนวคิดนี้ศึกษาการเกิดเปลี่ยนแปลงรูปร่างเป็นทรงรีของระบบที่ยุบตัวลงจากแรงดึงดูดนั่นเอง ซึ่งระบบเริ่มต้นในแบบจำลองนี้ มักจะมีสมมาตรทรงกลม การยุบตัวลงของระบบ สามารถมองได้ว่าเป็นระบบไม่ไอโซทรอปิกที่มีการเคลื่อนที่พุ่งเข้าในแนวรัศมีเป็นหลัก (radially anisotropic) ซึ่งนักดาราศาสตร์เชื่อว่าระบบดังกล่าวจะไม่เสถียรต่อการเปลี่ยนรูปร่าง ระบบจึงสามารถวิวัฒนาการไปสู่รูปร่างทรงรีได้ ซึ่งสมมุติฐานนี้ ได้รับการพิสูจน์ด้วยการจำลองคอมพิวเตอร์ และพบว่า ระบบในสมมาตรทรงกลมที่เย็น จะยุบตัวลงในแนวรัศมีและผลลัพธ์ที่ได้คือระบบมีความรีเกิดขึ้น ซึ่งความรีนั้นจะขึ้นกับตัวแปรเริ่มต้นของระบบต่างๆ เช่น ค่าฟังก์ชันความหนาแน่นในแนวรัศมี การแพร่กระจายของความเร็ว เป็นต้น ซึ่งการก่อกำเนิดรูปร่างรีจากระบบที่ยุบตัวในแนวรัศมีนี้ นักดาราศาสตร์หลายคนเชื่อว่าเชื่อมโยงกับความไม่เสถียรที่รู้จักในชื่อ *'ความไม่เสถียรของวงโคจรในแนวรัศมี' (radial orbit instability)* [5] ซึ่งกล่าวว่า ในสมดุลของระบบที่มีการเคลื่อนที่ในแนวรัศมีเป็นหลัก ระบบจะไม่เสถียร และเกิดการเปลี่ยนรูปร่างอย่างมาก

ถึงแม้ความไม่เสถียรดังกล่าว จะเป็นที่ยอมรับกันอย่างกว้างขวางว่าเป็นต้นกำเนิดของรูปร่างรี (หรือรูปร่างอสมมาตร) ของระบบ แต่การพิสูจน์ในเชิงทฤษฎีอย่างรัดกุมของความไม่เสถียรต่อการเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังกล่าวยังคงไม่สามารถพิสูจน์ได้โดยตรง ในปัจจุบัน ทฤษฎีดังกล่าวสามารถอนุมานได้โดยอ้อมจากข้อสรุปดังต่อไปนี้

ก) ในระบบที่ไอโซทรอปิกในเชิงทั่วไป ระบบจะมีเสถียรภาพเสมอหากฟังก์ชันการกระจายตัว (distribution function) เป็นฟังก์ชันลดกับพลังงาน [6]

ข) ในระบบที่ไม่ไอโซทรอปิกที่เงื่อนไขเริ่มต้นเป็นชนิดโพลีโทรป (polytrope) ซึ่งมีสมการสถานะ (equation of state) ระหว่างความดัน และความหนาแน่น เป็นสมการยกกำลัง (power law) จากการศึกษาพบว่า หากการกระจายตัวของความเร็วอยู่ในแนวรัศมีทั้งหมด ระบบจะไม่มีเสถียรภาพต่อการรบกวนภายนอก [7]

ค) ในการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ หากระบบอนุภาคมีวงโคจรส่วนใหญ่อยู่ในแนวรัศมี หรือระบบมีวิวัฒนาการโดยการยุบตัว ระบบจะสูญเสียรูปร่างเดิมซึ่งอาจเป็นรูปร่างใหม่ที่มีลักษณะสามแกน (triaxial) [8] ซึ่งก็คือทรงรีที่มีแกนหลักสามแกนที่ยาวไม่เท่ากันนั่นเอง

จะเห็นได้ว่า ในข้อพิสูจน์ 3 ข้อดังกล่าว ไม่มีส่วนใดที่สามารถบอกได้ว่า ความไม่เสถียรของระบบจากการที่มีวงโคจรในแนวรัศมีเป็นหลัก จะเชื่อมโยงโดยตรงกับการเปลี่ยนของรูปร่าง หรือ วงโคจรในแนวรัศมีจะทำให้เกิดรูปร่างรีได้เลย สิ่งที่นักดาราศาสตร์ทราบ ได้มาจากการอนุมานทางอ้อมกับทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับจากการจำลองทางคอมพิวเตอร์เท่านั้น นอกจากนี้ รูปร่างแท้จริง (intrinsic shape) ในสามมิติ ก็ยังคงเป็นปัญหาที่นักดาราศาสตร์ไม่สามารถตอบได้ชัดเจน เนื่องจากสิ่งที่นักดาราศาสตร์สามารถสังเกตเห็นคือรูปร่างที่ปรากฏใน 2 มิติเท่านั้น ที่ปรากฏเป็นวงรี ซึ่งรูปร่างแท้จริงสามารถเป็นได้ทั้งแบบทรงกลมยืด (prolate) ทรงกลมแบน (oblate) หรือแบบสามแกน (triaxial) [9]

ถึงแม้ความเชื่อมโยงระหว่างทฤษฎีความไม่เสถียรกับการเปลี่ยนแปลงรูปร่างจะไม่เด่นชัด นักดาราศาสตร์ก็ยังคงพยายามศึกษาเงื่อนไขของเสถียรภาพอย่างต่อเนื่องโดยอาศัยการจำลองทางคอมพิวเตอร์เป็นหลัก ในการกำหนดขีดจำกัดของเสถียรภาพในช่วงต้น นักดาราศาสตร์หลายกลุ่มได้กำหนดตัวแปรต่างๆ ขึ้นมาเพื่อทำการศึกษา ตัวแปรที่พื้นฐานที่สุด คือ **อัตราส่วนไวเรียล (virial ratio)** ซึ่งคำนวณจากสองเท่าของพลังงานจลน์หารด้วยพลังงานศักย์ของระบบ [10] ในกรณีที่เงื่อนไขเริ่มต้นมีอัตราส่วนไวเรียลต่ำ ระบบจะยุบตัวในแนวรัศมี ซึ่งในกรณีนี้จะคล้ายกับกรณีที่ระบบอยู่ในสถานะที่วงโคจรส่วนใหญ่อยู่ในแนวรัศมีและมีการวิวัฒนาการ จากการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์พบว่าวิวัฒนาการที่เกิดจากการยุบตัวของระบบ สามารถนำไปสู่ระบบสุดท้ายที่มีลักษณะทรงรีใน 3 มิติได้ จากการทดลองโดยการจำลองทางคอมพิวเตอร์ของหลายกลุ่ม พบว่า ขีดจำกัดของอัตราส่วนไวเรียลสูงสุดที่ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของระบบที่มีความ

หนาแน่นเริ่มต้นต่างๆ อยู่ที่ประมาณ 0.1 (หมายเหตุ ที่**สมดุลเชิงพลวัต (dynamical equilibrium)** อัตราส่วนไวเรียลมีค่าเท่ากับ 1 ระบบในภาพรวมจะหยุดนิ่ง) ในกรณีที่มีการกระจายความเร็วแบบไอโซโทรปิก เมื่ออัตราส่วนไวเรียลมีค่าสูงกว่านี้จะเกิดการยับยั้งการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของระบบ ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่า การกระจายความเร็วที่เพิ่มขึ้นตามอัตราส่วนไวเรียลมีผลคล้ายกับการเพิ่มความดันของแก๊สตามทฤษฎีจลน์ เพื่อต้านการยุบตัวจากแรงดึงดูด ระบบเลยเสถียรต่อการเปลี่ยนรูปร่างนั่นเอง

นอกจากอัตราส่วนไวเรียล ตัวแปรอีกตัวหนึ่งที่สามารถใช้ศึกษา และมีความเชื่อมโยงมากกว่า คือ **อัตราส่วนความไม่ไอโซโทรปี (anisotropic ratio)** ของระบบเริ่มต้น [11] โดยคำนวณจากอัตราส่วนของพลังงานจลน์ในแนวรัศมีต่อพลังงานจลน์ในแนวเส้นสัมผัสวง ซึ่งมีค่าตั้งแต่ 0 (การเคลื่อนที่ทั้งหมดอยู่ในแนวเส้นสัมผัสผิวทรงกลม) จนถึง อนันต์ (การเคลื่อนที่ทั้งหมดอยู่ในแนวรัศมี) จากการศึกษา พบว่า หากระบบมีค่าอัตราส่วนดังกล่าวสูง ซึ่งหมายถึงวงโคจรของอนุภาคอยู่ในแนวรัศมีเป็นหลัก ระบบจะมีโอกาสการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมาก อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ผลดังกล่าวจะเป็นที่คาดการณ์ได้ แต่จุดแบ่งเฟส ซึ่งสามารถมองว่าเป็นเส้นแบ่งระหว่าง สถานะที่เกิดวิวัฒนาการรูปร่าง กับ สถานะที่รูปร่างเสถียร สามารถอนุมานโดยอ้อมจากการจำลองคอมพิวเตอร์เท่านั้น เงื่อนไขของความไม่เสถียรภาพที่แน่ชัดยังไม่สามารถคำนวณได้โดยตรง

การศึกษาทางทฤษฎีในยุคปัจจุบัน

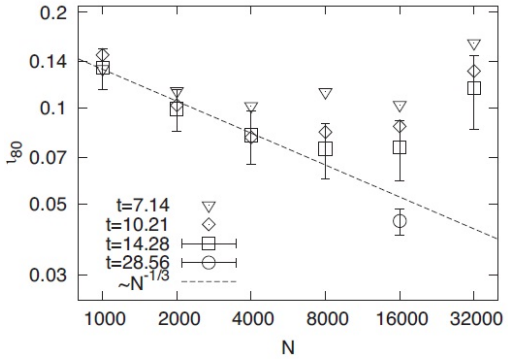
ต่อมา การศึกษาเสถียรภาพเริ่มมีความซับซ้อนมากขึ้น นักดาราศาสตร์บางกลุ่มได้เชื่อมโยง ระดับความไม่เสถียรกับค่าการกระเพื่อมของความหนาแน่นเริ่มต้น (initial density fluctuation) ของเงื่อนไขเริ่มต้นในระบบอนุภาค N ตัว โดยเสนอว่า ยิ่งการกระเพื่อมของความหนาแน่นมีแอมพลิจูดสูง ระบบจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างสูงตาม การศึกษาในหัวข้อนี้สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 มุมมอง คือ

1) การกระเพื่อมของความหนาแน่นในระดับมหัพภาค (macroscopic) ซึ่งสามารถศึกษาสร้างได้จากความหนาแน่นเริ่มต้นที่ไม่สม่ำเสมอ เช่น ความหนาแน่นแบบตัวประกอบกำลัง (power-law) แบบกระจุก (clumpy) [12] จากการศึกษา พบว่า ความไม่สม่ำเสมอของความหนาแน่น ดังกล่าว (ซึ่งอาจมองได้ว่าเป็นการกระเพื่อมในระดับมหัพภาค) ทำให้เกิดการยุบตัวอย่างรุนแรงและเกิดแกนกลางที่มีความหนาแน่นสูงมากและมีรูปร่างเบี่ยงจากทรงกลม ความไม่สม่ำเสมอนี้ ถูกมองว่าเป็นแหล่งกำเนิดของความไม่เสถียร โดยจะหายไปเมื่อเงื่อนไขเริ่มต้นมีความหนาแน่นที่สม่ำเสมอ

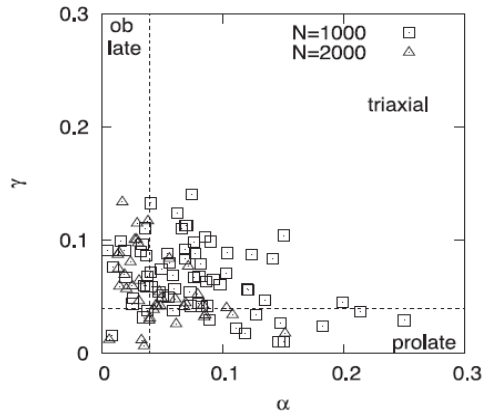
2) ในกรณีความหนาแน่นสม่ำเสมอ การกระเพื่อมของความหนาแน่นในระดับมหัพภาคหายไป แต่จะเกิดการกระเพื่อมของความหนาแน่นในระดับจุลภาค (microscopic) ขึ้นมาอย่างเด่นชัด [13] ซึ่งแอมพลิจูดการกระเพื่อมในระดับนี้ สามารถประมาณการได้ด้วย การกระเพื่อมแบบปัวซง (Poisson fluctuation) ซึ่งจะลงลงตามจำนวนอนุภาคในระบบ หากพิจารณาระบบ ‘เย็น’ หรือระบบที่ไม่มีความเร็วเริ่มต้นอยู่เลย จะพบว่าระบบจะวิวัฒนาการในลักษณะการยุบตัวอย่างรุนแรงเนื่องจากอนุภาคไม่มีความเร็วที่จะต้านแรงดึงดูดสู่ศูนย์กลาง

จากการวิเคราะห์พลศาสตร์ของการยุบตัว พบว่า แอมพลิจูดของการกระเพื่อมของความหนาแน่นเริ่มต้น สามารถเชื่อมโยงกับการกระเพื่อมของความเร็วที่ตกลงสู่จุดศูนย์กลางได้ ซึ่งการกระเพื่อมของความเร็วนี้ ทำให้ระบบเดิมที่อยู่ในสมมาตรทรงกลมสามารถวิวัฒนาการไปสู่ทรงรีได้เนื่องจากอนุภาคพุ่งออกด้วยความเร็วที่ไม่เท่ากันในสมมุติฐานที่ว่า อนุภาคที่พุ่งออกด้วยความเร็วสูงสุดจะสร้างแกนที่ยาวที่สุด (major axis) และอนุภาคที่พุ่งออกด้วยความเร็วน้อยที่สุดจะกลายเป็นแกนที่สั้นที่สุด (minor axis) ของรูปร่างสุดท้าย ซึ่งค่าความรี สามารถทำนายได้ว่าแปรผกผันกับจำนวนอนุภาคยกกำลัง 1/3 ซึ่งการทำนายนี้สอดคล้องกับผลการจำลองทางคอมพิวเตอร์ในช่วงอนุภาคตั้งแต่ 1,000-16,000 ตัว ซึ่งรายละเอียดของความรี หรือความแบน (flattening) ของระบบที่จำนวนอนุภาคต่างๆ แสดงอยู่ใน รูปที่ 3 ซึ่งจากภาพจะเห็นได้ว่า ยิ่งระบบมีจำนวนอนุภาคสูง ระบบจะมีแนวโน้มต่ำที่เบี่ยงออกจากสมมาตรทรงกลม เป็นสาเหตุจากแอมพลิจูดของการกระเพื่อมของความหนาแน่นที่ลดลง อันเนื่องจากหลักพื้นฐานของกลศาสตร์สถิติของระบบอนุภาค N ตัว เมื่อในระบบมีการกระจายตัวแบบสุ่ม เราจะได้ว่าการกระเพื่อมของความหนาแน่นในบริเวณใดๆ จะลดลงตาม N เสมอ

นอกจากนี้ ถึงแม้ว่าระบบเริ่มต้นจะมีสมมาตรทรงกลมเหมือนกัน แต่จากการกระเพื่อมของความหนาแน่นที่สถานะเริ่มต้น ซึ่งได้กระจายตัวแบบสุ่มในแต่ละตัวอย่าง (realization) ก็สามารถทำให้รูปร่างสุดท้ายมีความแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งรูปร่างสุดท้ายอาจใกล้เคียงทรงกลม เป็นทรงกลมยืด เป็นทรงกลมแบน หรือมีลักษณะสามแกน รูปร่างสุดท้ายของตัวอย่างทั้งหมด 110 ตัวอย่าง (70 ตัวอย่างสำหรับระบบ 1000 อนุภาค และ 40 ตัวอย่างสำหรับระบบ 2000 อนุภาค) ซึ่งเริ่มจากสมมาตรทรงกลมได้สรุปอยู่ในแผนภูมิที่ 4 ซึ่งแบ่งระบบสุดท้ายออกเป็น 4 รูปร่าง ซึ่งจากแผนภูมิ จะเห็นได้ว่ารูปร่างสุดท้ายของระบบมีความแตกต่างกันอย่างมากตั้งแต่ทรงกลม จนถึงรูปร่างสามแกน



รูปที่ *3 ค่าความแบน (i80) ของระบบอนุภาคที่มีจำนวนอนุภาค (N) ต่างๆ (ภาพจาก Worrakitpoonpon, 2015 [13])*



รูปที่ *4 ค่าดัชนีรูปร่างของระบบ 110 ตัวอย่าง ซึ่งแบ่งรูปร่างสุดท้ายออกเป็น ใกล้เคียงทรงกลม (บริเวณล่างซ้าย) ทรงกลมยืด (prolate) ทรงกลมแบน (oblate) และสามแกน (triaxial) (ภาพจาก Worrakitpoonpon, 2015 [13])*

นอกจากนี้ สิ่งที่เกิดขึ้นเสมอเมื่อระบบมีการยุบตัวอย่างรุนแรงก่อนเข้าสู่สมดุลเชิงพลวัต คือ โครงสร้างของระบบสุดท้ายจะมีลักษณะเป็นแบบ *'แก่น-แฮโล' (core-halo)* ซึ่งประกอบด้วยแกนกลางที่มีความหนาแน่นสูง หรือ 'แก่น' ล้อมรอบด้วยบริเวณที่มีความหนาแน่นต่ำที่มีมีบริเวณกว้าง หรือ 'แฮโล' ซึ่งจากการศึกษา พบว่าที่แก่นจะตรงกับสถานะดีเจเนอเรท (degenerate state) ซึ่งเป็นสถานะที่ไม่สามารถถูกบีบอัดในปริภูมิเฟสได้อีก และบริเวณแฮโล จะมีความหนาแน่นต่ำและคงที่ [14] และในระหว่างที่ระบบวิวัฒนาการสู่สถานะดังกล่าว จะมีการคายมวลและพลังงานออกมาบางส่วน [15] ซึ่งทำให้มวลและพลังงานของสถานะสมดุลเชิงพลวัตลดลงจากเงื่อนไขเริ่มต้น ซึ่งมวลและพลังงานที่คายออกมานี้ก็สัมพันธ์กับการกระเพื่อมของความหนาแน่นด้วยเช่นกัน

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่าถึงแม้นักดาราศาสตร์จะมีทฤษฎีมากมายที่ใช้ศึกษาดาราจักรรี แต่ความเข้าใจในวิวัฒนาการของรูปร่างยังคงจำกัดเนื่องจากปัจจัยหลัก
คือ ข้อจำกัดในการสังเกตการณ์ ทำให้การเปรียบเทียบกับทฤษฎีเป็นไปได้ยาก การศึกษาในเชิงทฤษฎีส่วนใหญ่จึงขึ้นอยู่กับการเปรียบเทียบกับการจำลองทางคอมพิวเตอร์ ในส่วนตัวบทของทฤษฎีเองก็ยังคงไม่สมบูรณ์อีกหลายส่วน และอยู่ในระหว่างการพัฒนาเช่นกัน สุดท้ายนี้ ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าบทความนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้ที่สนใจในทางฟิสิกส์ดาราศาสตร์ไม่มากก็น้อย เพื่อเป็นรากฐานในการพัฒนาทั้งในด้านการเรียนการสอนและการวิจัยด้านฟิสิกส์ดาราศาสตร์ต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] G. de Vaucouleurs, "On the distribution of mass and luminosity in elliptical galaxies", MNRAS 113, 134 (1953).

[2] V.A. Antonov, "English translation in dynamics of globular clusters", IAU Symp. 113, eds. J. Goodman and P. Hut (Reidel, Dordrecht), 1985, Vestn. Leningrad Gos. Univ. 7:135, 1962.

[3] D. Lynden-Bell, "Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems", MNRAS 136, 101 (1967).

[4] C. Horellou and F. Combes, "A model for the cartwheel ring galaxy", Ap&SS 276, 1141 (2001).

[5] V. Antonov, in G. Omarov, ed., "The dynamics of galaxies and star clusters", Nauka, Alma Ata, 139, 1973.

[6] V. Antonov, "Remarks on the problem of stability in stellar dynamics", SvA 4, 859 (1961).

[7] M. Hénon, "Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems", A&A 24, 229 (1973).

[8] V.L. Polyachenko, "Nonlinear evolution of spherical stellar systems", Sov. Astron. Lett. 7, 142 (1981).

[9] L.A. Aguilar and D. Merritt, "The structure and dynamics of galaxies formed by cold dissipationless collapse", ApJ 354, (33) 1990.

[10] K.W. Min and C.S. Choi, "Cold collapse of a spherical stellar system", MNRAS 238, 253 (1989).

[11] D. Merritt and L.A. Aguilar, "A numerical study of the stability of spherical galaxies", MNRAS 217, 787 (1985).

[12] F. Roy and J. Perez, "Dissipationless collapse of a set of N massive particles", MNRAS 348, 62 (2004).

[13] T. Worrakitpoonpon, "Spherical symmetry breaking in cold gravitational collapse of isolated systems", MNRAS 446, 1335 (2015).

[14] Y. Levin, R. Pakter and F.B. Rizzato, "Collisionless relaxation in gravitational systems: from violent relaxation to gravothermal collapse", Phys. Rev. E 78, 021130 (2008).

[15] M. Joyce, B. Marcos and F. Sylos Labini, "Energy ejection in the collapse of a cold spherical self-gravitating cloud", MNRAS 397, 775 (2009).